

Mesure curviligne sur un cercle

Hugues GENVRIN

November 2025

Démontrer que la mesure curviligne est égale au produit de la mesure angulaire par le rayon, pour un cercle.

Démonstration. Soit un cercle de centre O , de rayon R . On considère une mesure curviligne élémentaire $D\ell$. A partir de là, on construit le triangle rectangle en A , inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Soit (A, B, C) , Où l'hypoténuse est formée par le diamètre $D = [B; C]$.

Alors, on a : $\sin(d\alpha) = \frac{AC}{BC}$. Comme pour $d\ell \rightarrow 0$, alors $d\ell = AC$. D'autre part $d\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \sin(d\alpha) = d\alpha$. D'où l'on tire : $d\alpha = \frac{d\ell}{D} \Leftrightarrow 2d\alpha R = d\ell \Leftrightarrow d\omega R = d\ell$.

En intégrant : $\int d\ell = \int d\omega R$. On déduit :

$$\ell = \omega R$$

On déduit alors la circonférence totale du cercle :

$$\ell = 2\pi R$$

L'intérêt de cette mesure réside dans la formalisation d'une mesure de courbure sur toute variété de dimension 1. $\square$

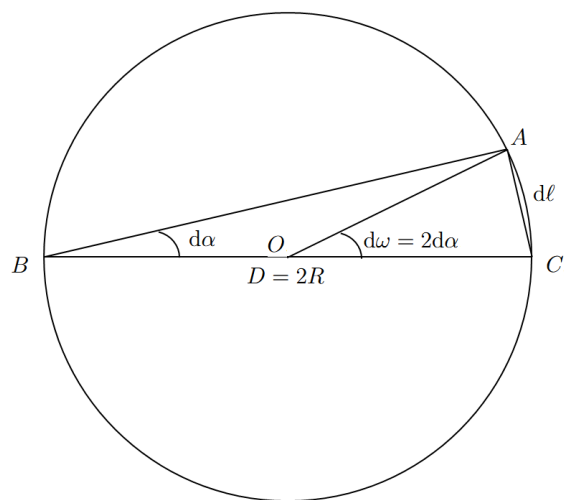


FIGURE 1 – Mesure curviligne sur un arc de cercle.