

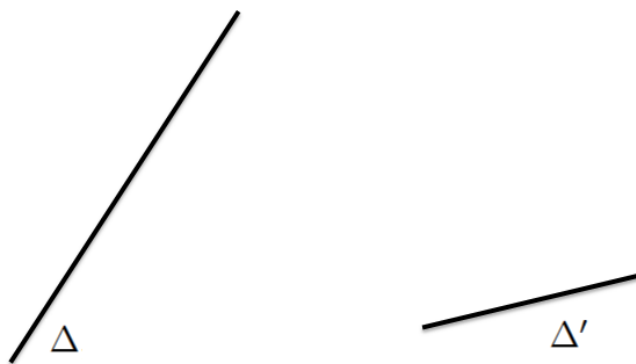
Pente d'une droite et dérivée

Hugues GENVRIN

October 2025

Montrer que la dérivée newtonienne est la pente d'un corde et non de la tangente.

Démonstration. **Dérivée et pente de la corde.** Nous pouvons comparer les pentes des deux droites Δ et Δ' .



Δ Est plus pentue que Δ'

FIGURE 1 – Notion de pente d'une droite.

Ce qui constitue la pente d'une droite peut être formalisée par le quotient : $\frac{dy}{dx} = \tan \beta = \frac{Ct_{oppos}}{Ct_{adjacent}} = \frac{BC}{AB}$. On remarque que AC est une corde et non une tangente en A à $y = f(x)$.

On rapproche la dérivée newtonienne $f'(A) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$, lorsque $h \rightarrow 0$ et $dx \rightarrow 0$. Alors ce nombre dérivé reste la pente de la corde et non de la tangente. Les nombres dérivés de la tangente ($y = ax + b$) et de la corde ($y = dx + e$) en A

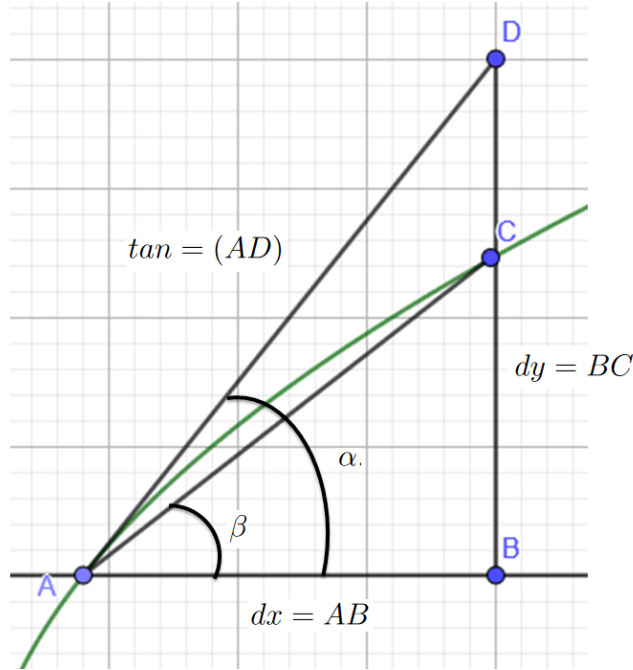


FIGURE 2 – Pente et dérivée.

sont respectivement a et d , qui sont aussi les coefficients directeurs des droites, et sont distincts : $a \neq d$.

D'où l'on conclut que la dérivée newtonienne n'est pas la pente de la tangente.

Construction de la tangente. Nous nous plaçons sur un pas de convexité homogène. On construit une suite de points $(B_i)_{1 \leq i \leq n_\infty}$, $(C_i)_{1 \leq i \leq n_\infty}$, $(D_i)_{1 \leq i \leq n_\infty}$. Où $B_i \in (AB)$, $C_i \in \mathcal{G}(y = f(x))$, $D_i \in \mathcal{T}_A(y = f(x))$. On construit le triangle $(A, B_i, \text{Sup}(|B_i C_i|, |B_i D_i|))$, telle que l'aire pour passer de i à $i + 1$ soit strictement décroissante ($\forall i$). Le triangle est rectangle en B_i . Alors $D_i \mapsto A$, et $C_i \mapsto A$. (D_i) et (C_i) forment deux suites strictement décroissantes, qui convergent vers A . Donc on conclut que (β_i) converge vers α . Et $(\tan \beta)_i = \frac{B_i C_i}{AB_i} \mapsto \tan \alpha = \frac{B_i D_i}{AB_i}$.

Donc la pente de la corde tend vers celle de la tangente. La dérivée newtonienne en A peut être approximée comme la pente de la tangente en A dans l'infinitésimal. $\square$