

Théorème de Fourier

Hugues GENVRIN

3 février 2026

1 Théorème

Théorème 1 (Théorème de Fourier (1807)). *Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction quelconque définie sur $I = [-\pi; \pi]$, alors elle peut être exprimée sur I par la série trigonométrique infinie :*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Où les coefficients a_0, a_m, b_m seront définis par :

1. $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).dx.$
2. $a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx).dx.$
3. $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx).dx.$

2 Démonstration

Supposons que :

1. $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$
2. f soit intégrable.

Nous voulons calculer les coefficients a_0, a_m, b_m tels que l'équation formulée ci-dessous soit vérifiée. On précise que si f est intégrable par la méthode de Riemann ou de Lebesgue, alors l'intégrale d'une sommation infinie est la sommation de l'intégrale. On précise qu'en 1807, ces théorèmes n'étaient pas démontrés.

3 Calcul de a_0

On a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0.dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).dx.$$

Compte-tenu qu'on peut passer le symbole de sommation à gauche de l'intégrale, l'équation devient :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0.dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx).dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx).dx. \end{aligned}$$

Nous allons considérer alors les intégrales suivantes quelle que soit la valeur de n :

$$\begin{aligned} I_1^n &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx).dx \\ I_2^n &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx).dx. \end{aligned}$$

Pour le calcul de I_1^n , on procède aux changement de variable élémentaire $u = nx$, il vient : $du = n.dx$ et $-m\pi \leq u \leq n\pi$, soit :

$$\begin{aligned} I_1^n &= \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{1}{n} \cos(u).du = \frac{1}{n} [\sin(u)]_{-n\pi}^{n\pi} \\ &= \frac{1}{n} [\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)] = \frac{1}{n} [0 - 0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour le calcul de I_2^n on procède par une méthode analogue de changement de variables, il en découle :

$$\begin{aligned} I_2^n &= \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{1}{n} \sin(u).du = -\frac{1}{n} [\cos(u)]_{-n\pi}^{n\pi} \\ &= -\frac{1}{n} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] = \frac{1}{n} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi)] = -\frac{1}{n} \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0.dx = \frac{1}{2} [a_0 x]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} a_0 2\pi = a_0 \pi.\end{aligned}$$

Et alors :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).dx$$

4 Calcul de a_m

Nous reprenons l'équation fournie en hypothèse et multiplions les deux termes de l'égalité par $\cos(mx)$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) f(x).dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 \cos(mx).dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(mx).dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos(mx).dx.\end{aligned}$$

Sachant que : $I_1^m = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx).dx = 0$, nous avons alors à calculer les deux intégrales suivantes :

1. $I_3^m = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx).dx.$
2. $I_4^m = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx).dx.$

Pour le calcul de I_3 , nous allons distinguer deux sous cas, d'une part le cas où $m \neq n$ et le cas où $n = m$.

Si $m \neq n$ on sait alors que :

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos[(n+m)x] + \cos[(n-m)x]].$$

D'où on décompose l'intégrale initiale en deux termes :

$$\begin{aligned}I_3^{m \neq n} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(n+m)x].dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(n-m)x].dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+m} \sin[(n+m)x] \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-m} \sin[(n-m)x] \right]_{-\pi}^{\pi}.\end{aligned}$$

Or $\forall \alpha \in \mathbb{N}, \sin(\alpha\pi) = 0$. Il est alors évident que :

$$I_3^{m \neq n} = 0.$$

Intéressons nous alors au cas où $m = n$, naturellement :

$$I_3^{m=n} = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(mx).dx).$$

Une formule trigonométrique nous renseigne que :

$$\cos^2(mx) = \frac{1}{2} \cos(2mx) + \frac{1}{2}.$$

On poursuit alors par une sommation de deux intégrales :

$$\begin{aligned} I_3^{m=n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2mx).dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \\ &= \frac{1}{2} I_1^{2m} + \frac{1}{2} [x]_{-\pi}^{\pi} = 0 + \pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Pour le calcul de I_4^m , nous procédons également à une distinction des cas $m \neq n$ et $m = n$. Sachant que :

$$\cos(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\sin[(n+m)x] - \sin[(n-m)x]].$$

Nous poursuivons alors par une sommation de deux intégrales :

$$\begin{aligned} I_3^{m \neq n} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(n+m)x].dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(n-m)x].dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{n+m} \cos[(n+m)x] \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-m} \cos[(n-m)x] \right]_{-\pi}^{\pi}. \end{aligned}$$

Or $\forall \alpha \in \mathbb{N}, \cos(\alpha\pi) = \cos(-\alpha\pi)$. Il est alors évident que :

$$I_4^{m \neq n} = 0.$$

Intéressons nous alors au cas où $m = n$, naturellement par la formule trigonométrique : $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ on peut décomposer l'intégrale à

calculer :

$$\begin{aligned}
 I_4^{m=n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(mx).dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx).dx \\
 &= \frac{1}{2} I_2^{2m} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Il résulte alors la détermination du coefficient a_m :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) f(x).dx &= 0 + \pi + 0 = \pi \\
 \Leftrightarrow a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(mx) f(x).dx).
 \end{aligned}$$

5 Calcul de b_m

Nous reprenons l'équation fournie en hypothèse et multiplions les deux termes de l'égalité par $\sin(mx)$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) f(x).dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 \sin(mx).dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \sin(mx).dx \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \sin(mx).dx.
 \end{aligned}$$

Il est évident que les principes de calcul sont identiques, nous avons à calculer l'intégrale :

$$1. I_6^m = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx).dx.$$

Sachant que : $I_2^m = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx).dx = 0$ et $I_4^m = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx).dx$.

Pour ce qui nous intéresse maintenant, à savoir le calcul de I_6^m , on va procéder à nouveau à un calcul en deux temps. Tout d'abord pour le cas $m \neq n$ et le cas $m = n$. Pour la première espèce on utilise une formule trigonométrique :

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos[(n+m)x] - \cos[(n-m)x]].$$

$$\begin{aligned}
I_6^{m \neq n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx).dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m+n)x].dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x].dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin[(m+n)x] \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-n} \sin[(m-n)x] \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0, \text{ du fait que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}, \sin(\alpha\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus que le cas où $m = n$ qui est évident par les calculs antérieurs :

$$\begin{aligned}
I_6^{m=n} + I_3^{m=n} &= I_6^{m=n} + \pi = \int_{-\pi}^{\pi} 1.dx = 2\pi \\
\Rightarrow I_6^{m=n} &= \pi b_m.
\end{aligned}$$

Nous déduisons donc la valeur du coefficient b_m par :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx).dx &= \pi b_m \\
\Rightarrow b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \sin(mx).dx).
\end{aligned}$$

En conséquences le théorème de Fourier est bien démontré, nous avons défini la valeur des coefficients :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).dx. \\
a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx).dx. \\
b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx).dx.
\end{aligned}$$

tels que :

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx).}$$