

L'équation de Schrödinger pour une harmonique

Hugues GENVRIN

3 février 2026

On part de la relation d'Einstein : $E = \hbar\nu$ et celle de De Broglie : $p = \frac{\hbar}{\lambda} \Rightarrow |\mathbf{p}\rangle = \hbar \cdot |\mathbf{k}\rangle$.

Soit l'équation d'une harmonique :

$$\begin{aligned}\psi(|\mathbf{r}\rangle, t) &= \psi_0 \exp \left[i(|\mathbf{k}\rangle |\mathbf{r}\rangle - \nu t) \right] \\ &= \psi_0 \exp \left[\frac{i}{\hbar} (|\mathbf{p}\rangle \cdot |\mathbf{r}\rangle - Et) \right].\end{aligned}$$

En dérivant cette expression par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\frac{\delta\psi}{\delta t}(|\mathbf{r}\rangle, t) &= -\psi_0 \frac{i}{\hbar} E \exp \left[\frac{i}{\hbar} (|\mathbf{p}\rangle \cdot |\mathbf{r}\rangle - Et) \right] \\ &= -\frac{i}{\hbar} E \psi(|\mathbf{r}\rangle, t).\end{aligned}$$

Le gradient de la fonction initiale s'écrit :

$$\begin{aligned}\nabla\psi(|\mathbf{r}\rangle, t) &= \frac{i}{\hbar} |\mathbf{p}\rangle \psi_0 \exp \left[\frac{i}{\hbar} (|\mathbf{p}\rangle \cdot |\mathbf{r}\rangle - Et) \right] \\ &= \frac{i}{\hbar} |\mathbf{p}\rangle \psi(|\mathbf{r}\rangle, t).\end{aligned}$$

Or $E = E_\xi + E_\pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(r) = \frac{p^2}{2m} + V(r)$. Avec : $\hbar i \frac{\delta\psi}{\delta t} = E\psi$, il vient : $E\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + V(r)\psi$. De plus $-i\hbar\nabla\psi = |\mathbf{p}\rangle\psi$, soit : $\hbar i \frac{\delta\psi}{\delta t} = \frac{p^2}{2m}\psi + V_r\psi$.

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \frac{i}{\hbar} \frac{i}{\hbar} p^2 \psi(|\mathbf{r}\rangle, t) \\ \Leftrightarrow \psi \frac{p^2}{2m} &= (\nabla\psi)^2 \hbar^2 (-1).\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\hbar \frac{\delta \psi}{\delta t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla \psi)^2 + V(r)\psi \\ \Leftrightarrow E\psi &= H\psi.\end{aligned}$$