

Équations différentielles

Hugues GENVRIN

3 février 2026

1 Equations homogènes du deuxième ordre

Soit l'équation :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0. \quad (1)$$

On procède au changement de variable : $x \mapsto \exp^{\lambda t}$. Soit $a \frac{dx}{dt} \mapsto a\lambda \exp^{\lambda t}$, $m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\lambda^2 \exp^{\lambda t}$. L'équation (??) devient $(m\lambda^2 + a\lambda + b) \exp^{\lambda t} = 0$.

Une condition suffisante pour trouver une fonction solution est de déterminer les solutions de l'équation caractéristique . Si la fonction admet deux racines réelles, alors la somme des deux fonctions solutions est aussi une solution (??) :

$$t \mapsto C_1 \exp^{\lambda_1 t} + C_2 \exp^{\lambda_2 t}. \quad (2)$$

Si l'équation caractéristique admet une racine double : $\lambda_3 = \frac{-a}{2m}$, la fonction $t \mapsto \exp^{\lambda_3 t}$ est solution, ce qui entraîne que la fonction $t \mapsto t \exp^{\lambda_3 t}$ est aussi solution de l'équation. La somme des deux fonctions à une constante près est donc solution :

$$t \mapsto C_3 \exp^{\lambda_3 t} + C_4 t \exp^{\lambda_3 t}. \quad (3)$$

Si l'équation caractéristique n'admet pas de racines réelles , elle admet deux racines complexes. Soit $\alpha + \imath\beta$ une racine, alors : $(m(\alpha^2 - \beta^2) + a\alpha + b) + \imath(m\beta^2 + a\beta) = 0$. Si $t \mapsto \exp^{\alpha t + \imath\beta t}$ est une solution dans $\mathbb{C}$,

nous avons nos deux fonctions réelles solutions : $t \mapsto C_5 \exp^{\alpha t} \cos \beta t$, et $t \mapsto C_6 \exp^{\alpha t} \sin \beta t$ dont la somme est la fonction recherchée :

$$t \mapsto C_5 \exp^{\alpha t} \cos \beta t + C_6 \exp^{\alpha t} \sin \beta t \quad (4)$$

2 Equation non homogène du deuxième ordre

2.1 Approche mathématique (Source KAL)

« Ce sont les équations d'oscillations linéaire d'un point matériel sous l'action d'une force élastique. » L'équation générale est de la forme :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = A \cos \omega t. \quad (5)$$

On remarque que si $x_1(t)$ est solution, que $x_2(t)$ est solution de l'équation homogène qu'on peut en tirer, alors $x_1(t) + x_2(t)$ sera solution de l'équation 2.1. Nous allons partir d'une fonction généralisant le terme de droite de l'équation : $x(t) = B \cos(\omega t + \delta)$. Alors l'équation 2.1 devient :

$$(-m\omega^2 + b)B \cos(\omega t + \delta) - a\omega B \sin(\omega t + \delta) = A \cos(\omega t). \quad (6)$$

Si l'on prend l'égalité : $a \cos x + b \sin x = \alpha(\cos x + \delta')$, en développant et en identifiant α et $\tan \delta'$ en fonction de $a \neq 0$ et b , il vient :

$$\alpha = \sqrt{(b - m\omega^2)^2 + a^2\omega^2}$$

$$\delta' = \arctan \left[\frac{a\omega}{B(b - m\omega^2)} \right].$$

Comme $x = \omega t + \delta$, en prenant $\delta = -\delta'$, on arrive à : $x(t) = \alpha B \cos(\omega t) = A \cos(\omega t)$. Nous avons une fonction solution où $\alpha B = A \Leftrightarrow \frac{B}{A} = \frac{1}{\alpha} = \phi(\omega)$. « Nous mettons en correspondance l'amplitude de l'oscillation forcée à l'amplitude de l'oscillation de la force imposée, on détermine par le graphe $y = \pi(\omega)$ la courbe de résonance. »

2.2 Approche physique

La forme générale d'une equation différentielle du deuxièmes ordre à coefficients réels est :

$$(\alpha_2) \frac{d^2 f}{dt^2} + (\alpha_1) \frac{df}{dt} + (\alpha_0) f = \beta \quad (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \beta) \in \mathbb{R}^4.$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E} : \left(\frac{1}{\omega_0}\right) \frac{d^2 f}{dt^2} + \left(\frac{2m}{\omega_0}\right) \frac{df}{dt} + f = f_f.$$

La deuxième forme étant modélisée avec des paramètres qui permettent de leur attribuer des sens bien précis :

$$\begin{cases} f_i = f|_{t=0} = 0, \\ f'_0 = \frac{df}{dt}|_{t=0} = 0, \\ f_f = f_\infty, \text{ valeur à la borne infinie,} \\ f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \\ m \text{ est le coefficient d'amortissement.} \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation, on utilise une méthode qui consiste à déterminer l'équation caractéristique associée à $\mathcal{E}$ qu'on appelle E :

$$(E) : \frac{1}{\omega_0^2} R^2 + \frac{m}{\omega_0} R + 1 = 0.$$

On néglige le terme de droite pour le reprendre en considération dans des conditions aux bornes plus tard. Le déterminant de cette équation vaut :

$$\Delta = \left(\frac{2m}{\omega_0}\right)^2 - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4(m^2 - 1)}{\omega^2}.$$

On distingue alors trois cas :

$\Delta > 0$. On obtient alors deux racines distinctes r_1 et r_2 .

$$\begin{cases} r_1 = \omega_0(-m + \sqrt{m^2 + 1}) \\ r_2 = \omega_0(-m - \sqrt{m^2 + 1}). \end{cases}$$

La stabilité de la fonction solution sera dépendante de la valeur du coefficient m . On peut d'ores et déjà composer le tableau :

Coefficient d'amortissement	Racines de E	Régime
$m > 1$	$r_1 < 0, r_2 < 0$	Régime stable et apériodique
$m < -1$	$r_1 > 0, r_2 > 0$	Régime instable

La solution générale de cette équation s'exprime alors par :

$$f(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + f_f.$$

Les paramètres A et B se déterminent par les conditions aux bornes :

$$\begin{aligned} A + B + f_f = f(0) = f_0 = 0, \frac{df}{dt} \big|_{t=0} = Ar_1 + Br_2 = 0 \\ \Leftrightarrow A = -g_\infty \frac{r_2}{r_2 - r_1}, B = g_\infty \frac{r_1}{r_2 - r_1} \end{aligned}$$

On déduit alors la fonction f :

$$\boxed{f(t) = f_\infty \left(1 - \frac{r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} \right)}. \quad (7)$$

Voici les graphiques que nous déduisons :

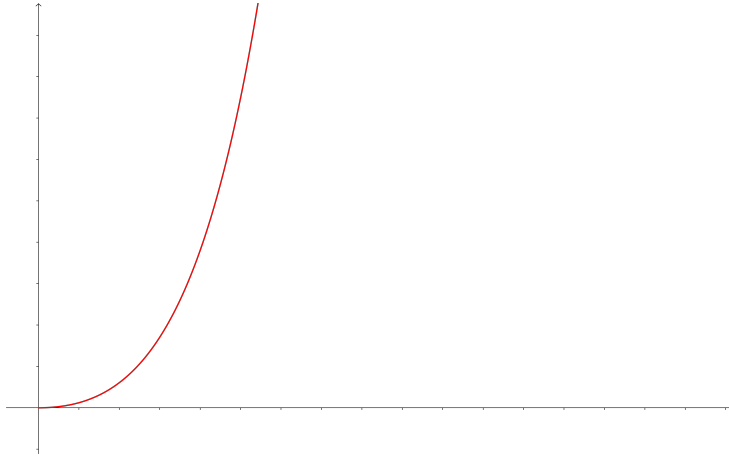


FIGURE 1 – Régime stable et apériodique - $m = 1.1$.

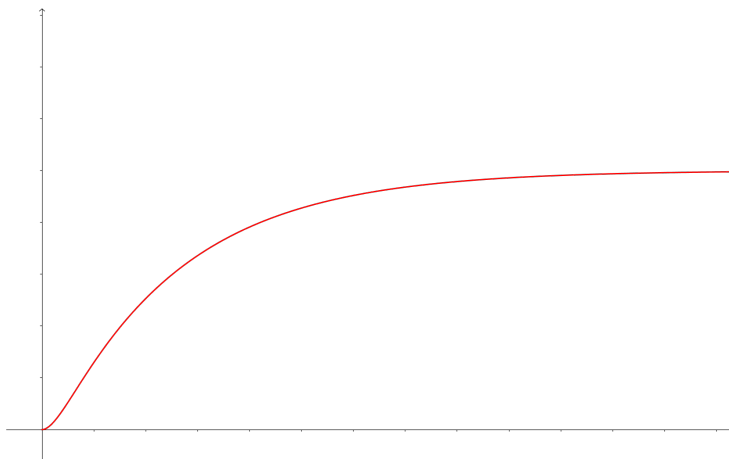


FIGURE 2 – Régime instable - $m = -1.1$.

$\Delta < 0$. C'est le cas où $-1 < m < 1$. Nous avons alors deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 telles que :

$$\begin{cases} \Re(r_1) = -m\omega_0 \\ \Im(r_1) = \omega_0\sqrt{1-m^2} = -\Im(r_2). \end{cases}$$

La solution de l'équation non homogène est alors : $f(t) = e^{\Re(r_1)t} (A \cos[\Im(r_2)t] + B \sin[\Im(r_2)t])$ qui conduit à une solution homogène en prenant en compte les conditions limites : soit f_∞ . La stabilité de la fonction solution sera dépendante de la valeur du coefficient m . On peut d'ores et déjà composer le tableau :

Coefficient d'amortissement	Racines de E	Régime
$m > 0$	$\Re(r_1) = \Re(r_2) > 0$	Régime stable, régime pseudo périodique
$m < 0$		Régime instable
$m = 0$		Régime oscillant

Comme pour le cas précédent, nous calculons la valeur des paramètres A et B par les autres conditions aux bornes, soit en zéro. Il vient :

$$\begin{aligned} A + f_\infty = f_0 = 0, \frac{df}{dt} \big|_{t=0} = A\Re(r_1) + B\Im(r_1) = 0 \\ \Leftrightarrow A = -f_\infty, B = f_\infty \frac{\Re(r_1)}{\Im(r_1)} \end{aligned}$$

On détermine alors la fonction solution de $\mathcal{E}$:

$$\boxed{f(t) = f_\infty e^{-m\omega_0 t} \left[\cos(\omega_0 t \sqrt{1-m^2}) + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-m^2}) \right]} \quad (8)$$

Voici les différents cas de figure que nous obtenons :

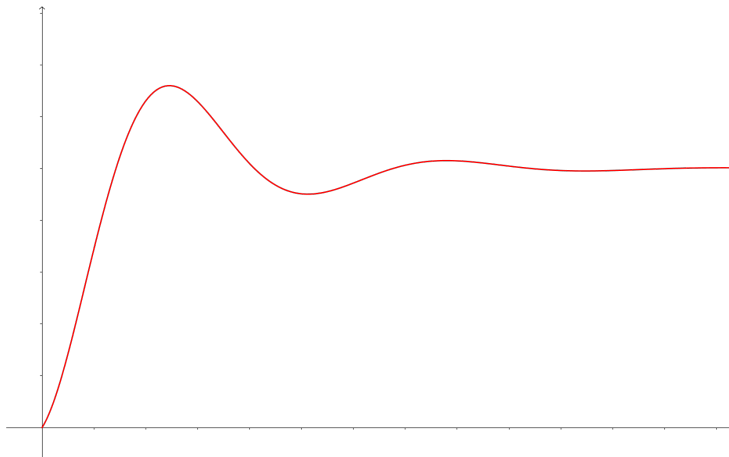


FIGURE 3 – Régime stable - $m = 0.25$.

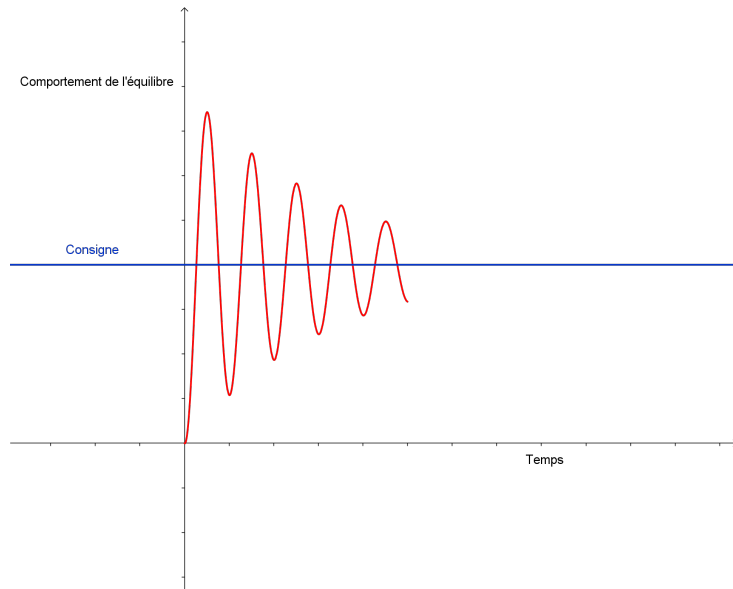


FIGURE 4 – Régime instable - $m = -0.05$.

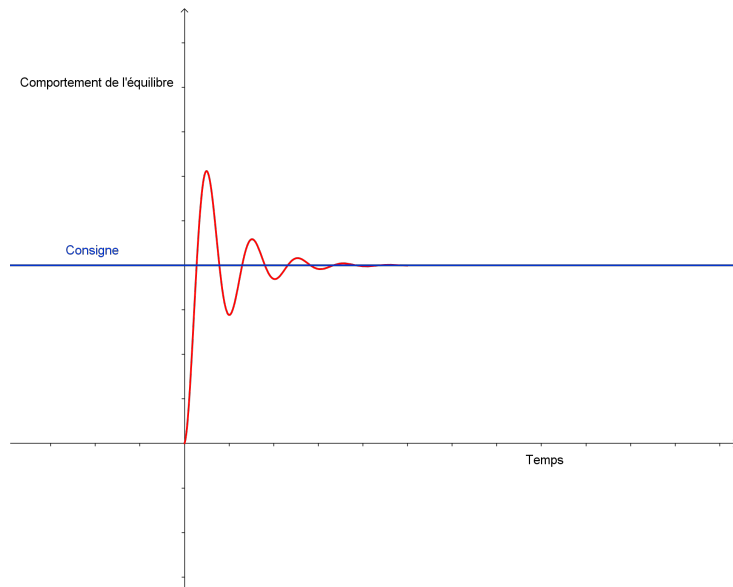


FIGURE 5 – Régime périodique- $m = 0$.

$\Delta = 0$. Alors c'est la cas où $m \pm 1$. Nous déduisons le calcul de la racine double réelle :

$$r_D = -m\omega_0$$

Nous aurons alors deux types de solutions :

Coefficient d'amortissement	Racines de E	Régime
$m = 1$	$r_D < 0$	Régime stable
$m = -1$	$r_D > 0$	Régime instable

La solution f de l'équation $\mathcal{E}$ est alors du type :

$$f(t) = (At + B)e^{r_D t} + f_\infty$$

On calcule toujours les paramètres A et B à la borne nulle par la fonction et la dérivée, et on trouve :

$$B = -f_\infty, A = f_\infty r_D = f_\infty m \omega_0.$$

Alors on déduit l'équation f solution de $\mathcal{E}$:

$$\boxed{f(t) = f_\infty (1 - (1 + m \omega_0 t) e^{-m \omega_0 t})}. \quad (9)$$

On retrouve le cas des graphiques déjà présentés pour $m > 1$ et $m < 1$. Nous représentons ci-dessous le graphique pour m dans le voisinage de l'unité, qui marque la transition entre le régime stable aperiodique ($m > 1$) et le régime stable pseudo-periodique ($m < 1$).

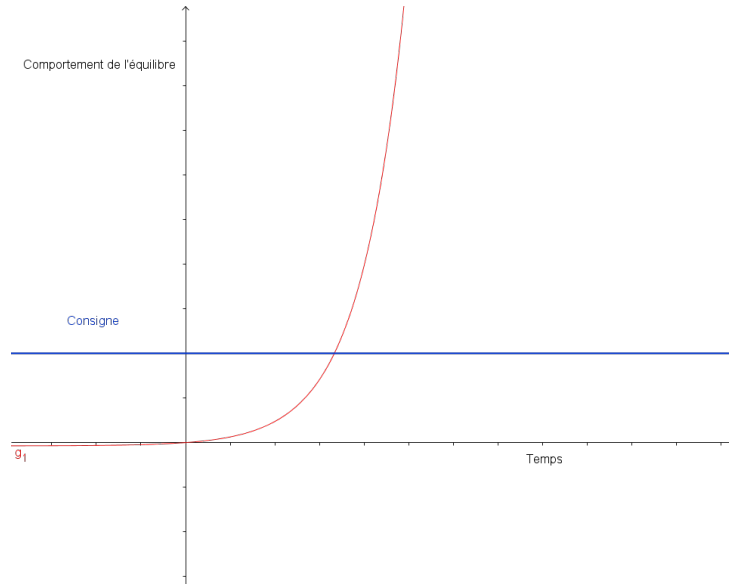


FIGURE 6 – Régime stable - $m \in]1 - \epsilon; 1 + \epsilon[$.

Conclusion On peut déduire le tableau des différents types de stabilité pour une équation du type $\mathcal{E}$ en fonction du paramètre d'amortissement m .

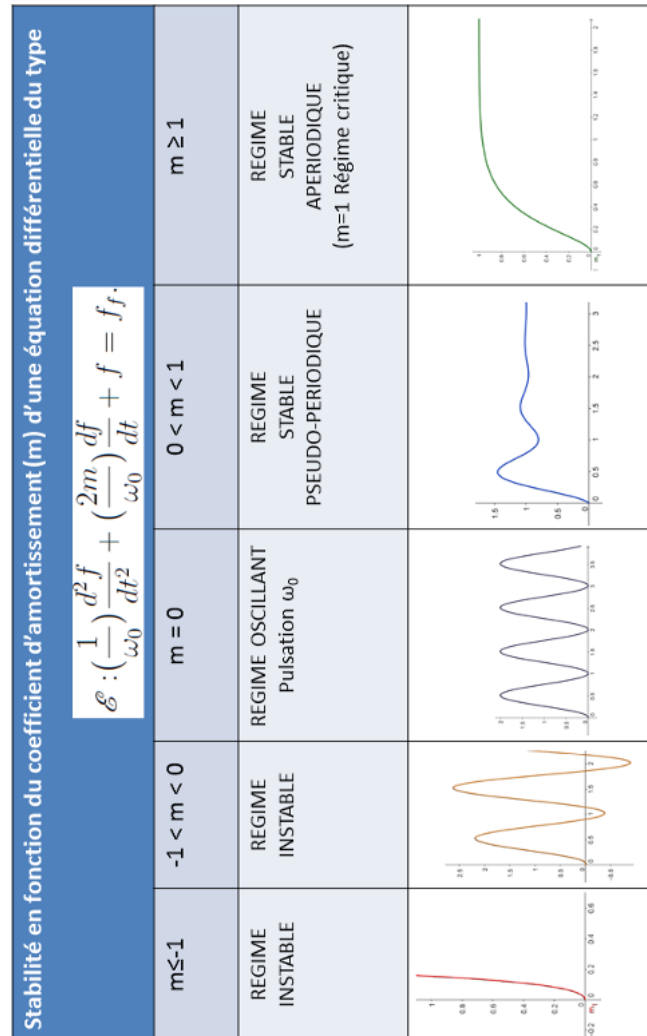


FIGURE 7 – Récapitulatif des états de stabilité de $\mathcal{E}$.

3 Méthodes par approximation

Il n'est pas toujours possible d'exprimer les solutions d'une équation différentielle en les termes d'une fonction. Il est donc nécessaire de développer des méthodes par approximation.