

Calcul variationnel

Hugues GENVRIN

3 février 2026

Résumé

D'après la démonstration in « Calculus of variations », de Gelfand and Formin, p14-15.

1 L'équation d'Euler

Définition 1. *On appelle fonction de la classe C^1 une fonction dérivable qui est continue en chacun de ses points. Une fonction de la classe C^2 sera une fonction qui possédera une dérivée première et une dérivée seconde continue. Une fonction de classe C^∞ sera infiniment dérivable et toutes ses dérivées seront continues.*

Soit $F(x, y, z)$ une fonction C^2 pour chacune des variables prises. Alors pour les fonction $y(x)$ qui sont continument différentiables pour $a \leq x \leq b$, et satisfaisant la condition aux limites :

$$y(a) = A, y(b) = B,$$

On se propose de trouver la fonctionnelle :

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

qui possède un extremum faible.

Soit $h(x)$ une variation de la fonction $y(x) \mapsto y(x) + h(x)$ telle que $h(a) = h(b) = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[y+h] - J[y] = \int_a^b F(x, y+h, y'+h')dx - \int_a^b F(x, y, y')dx \\ &= \int_a^b F(x, y+h, y'+h')dx - F(x, y, y')dx\end{aligned}$$

En appliquant le développement de Taylor sur la fonction $\Delta[J]$ à deux variables, et se restreignant à l'ordre de la première dérivée, nous négligeons les autres termes, on obtient :

$$F(x, y+h, y'+h') = F(x, y, y') + hF_y(x, y, y') + \dots + h'F_{y'}(x, y, y') + \dots$$

Il vient : $\delta[J] = \int_a^b F(x, y+h, y'+h')dx - F(x, y, y')dx = \int_a^b (hF_y + h'F_{y'})dx$.
Nous allons procéder en deux étapes, premièrement nous voulons réduire le terme à intégrer par le lemme suivant :

Lemme 1 (Réf : Lemme n°4). *Si $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont continues sur $[a; b]$, et si : $\int_a^b [\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)]dx = 0$, pour toute fonction $h(x) \in \mathcal{D}(a; b)$, telle que $h(a) = h(b) = 0$, alors $\beta(x)$ est différentiable et $\beta'(x) = \alpha(x), \forall x \in [a; b]$.*

Posons $A(x) = \int_a^x \alpha(\xi)d\xi$. On a $d(Ah) = (dA).h + A.(dh)$, avec $[Ah]_a^b = A(b)h(b) - A(a)h(a) = 0$ par hypothèses.

Nous allons montrer maintenant que :

Propriété 1 (Propriété 3 page). *Soit $\alpha(x)$ telle que $\int_a^b \alpha(x)h'(x)dx = 0$ pour toute fonction h telle que $h(a) = h(b) = 0$. Alors $\alpha(x) = c$.*

C'est évident, si l'on pose $I = \int_a^b \alpha(x)h'(x) - \int_a^b ch'(x)dx$. Or $c \int_a^b h'(x)dx = c[h(b) - h(a)] = 0$ et par hypothèse le terme de gauche conduit à une intégrale nulle. D'où l'on tire : $c = \alpha(x)$.

En revenant à l'expression de $\int_a^b \alpha(x)h(x) = - \int_a^b Ah'$ qu'on porte dans l'intégrale du lemme, il vient :

$$\int_a^b [\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)]dx = \int_a^b [-A(x) + B(x)]h'(x)dx = 0.$$

On déduit alors de la propriété que :

$$-A(x) + \beta(x) = Cte \Rightarrow \beta'(x) = \alpha(x).$$

Par application du lemme à l'élément δJ , on déduit le théorème d'Euler :

Théorème 1. Soit $J[Y]$ une fonctionnelle de la forme $\int_a^b F(x, y, y')dx$, définie pour l'ensemble des fonctions $y(x)$, dont les dérivées premières sont continues sur $[a; b]$, et satisfaisant les conditions aux limites $y(a) = A$ et $y(b) = B$, alors une condition nécessaire pour que $J[y]$ admette un extremum pour une fonction $y(x)$ est que $y(x)$ satisfasse l'équation d'Euler :

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0}.$$

2 Le formalisme et principe Lagrangien [?, ?]

2.1 Formalisme

2.2 Équations d'Euler-Lagrange

On transforme l'écriture de l'équation d'Euler, dans une optique physique.

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}_i} \right)$$

2.2.1 Moments conjugués ou impulsions généralisées

$$p_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}_i}$$

$$\dot{p}_i = \frac{d(p_i)}{dt} = \frac{d\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}_i}\right)}{dt} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i}.$$

2.3 Le principe de moindre action [?] page 54

On reprend la formulation de Hamilton (1854) : « Tout système mécanique est caractérisé par une fonction de Lagrange ou Lagrangien : $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$, dépendant de la coordonnée x , de sa dérivée par rapport au temps $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, et éventuellement du temps. Les quantités x et $\dot{x}$ sont appelées variables d'état. »

Pour toute trajectoire $x(t)$, on définit l'action S par l'intégrale :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t).$$

« Le principe de moindre action dit que la trajectoire physique effectivement suivie $X(t)$ est telle que S est minimale, ou plus généralement extrême. »

3 Le principe variationnel de Hamilton

3.1 Équations canoniques

Soit le hamiltonien :

$$\begin{aligned} H(\{x_i\}, \{p_i\}, t) &= \sum_i p_i \dot{x}_i - \mathcal{L} \\ \Rightarrow dH &= p_i d\dot{x}_i + \dot{x}_i dp_i - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x_i} dx_i - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}_i} d\dot{x}_i - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta t} dt \\ &= \dot{x}_i dp_i - \dot{p}_i dx - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta t} dt. \end{aligned}$$

Nous déduisons les équations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\delta H}{\delta p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\delta H}{\delta x_i} \end{aligned}$$

La valeur de la fonction de Hamilton étant l'énergie, « nous avons un système différentiel couplé du premier ordre dans le temps ».

3.2 Crochets de Poisson

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial x} \end{aligned}$$

On a les propriétés :

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \{x, p\} = 1, \{x_i, x_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0, \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

On déduit l'évolution temporelle d'une grandeur physique :

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial t} \dot{t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \text{ en utilisant les équations de Hamilton.}$$