



Action & Dynamique

La mécanique,

d'une science expérimentale à une théorie hypothético-déductive.

Mécanique

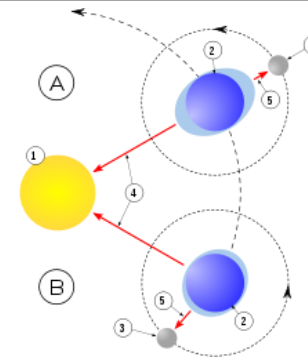
Définition à date (CNTRL) :

A/ Qui concerne les lois du mouvement et de l'équilibre

B/ Qui a rapport à l'étude des machines, de leur construction, de leur fonctionnement.

- ✓ Démultiplier ou Multiplier la force
- ✓ Raccourcir les distances physiques
- ✓ Des lois d'économie de la pensée,
- ✓ Aller plus vite,
- ✓ Déterminisme « mêmes causes, mêmes effets »,
- ✓ Découvrir un aspect structural du monde avec sa grammaire mathématique,
- ✓ Rapport à la technique

JUIL		BASSE MER		coef
		matin	soir	
1	D	09.19	21.47	70
2	L	10.20	22.48	80
3	M	11.15	23.44	89
4	M	--	12.06	96
5	J	00.36	12.55	99
6	V	01.25	13.42	97
7	S	02.11	14.28	92
8	D	02.55	15.13	83
9	L	03.38	16.00	72
10	M	04.22	16.49	60
11	M	05.08	17.43	49
12	J	06.01	18.42	41
13	V	07.00	19.45	38
14	S	08.05	20.46	38
15	D	09.06	21.41	44
16	L	09.58	22.28	52
17	M	10.43	23.10	61
18	M	11.23	23.50	70
19	J	--	12.01	78
20	V	00.28	12.38	84
21	S	01.05	13.16	87
22	D	01.43	13.54	88
23	L	02.22	14.34	86
24	M	03.02	15.17	81
25	M	03.46	16.05	74
26	J	04.36	16.59	65
27	V	05.34	18.03	57
28	S	06.41	19.14	54
29	D	07.54	20.29	54
30	L	09.06	21.39	62
31	M	10.09	22.40	73

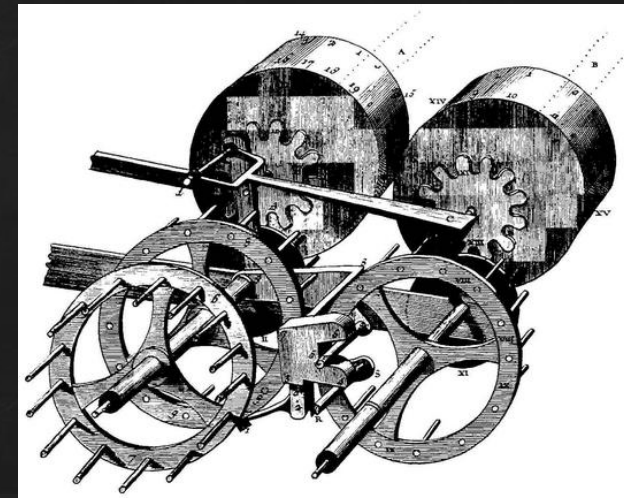


Machine de Maxwell pour calculer les marées



Evolution de la Mécanique

- ⌘ La mécanique Antique
- ⌘ La mécanique au moyen-âge (Oresme, Buridan, Albert de Saxe, ...)
- ⌘ La chute des corps (Galilée et Toricelli)
- ⌘ La mécanique des astres (Copernic, Tycho-Brahé, Kepler)
- ⌘ La mécanique Newtonienne
- ⌘ La mécanique analytique
- ⌘ La mécanique céleste
- ⌘ La mécanique des Fluides
- ⌘ La mécanique statistique
- ⌘ La mécanique quantique
- ⌘ La mécanique relativiste
- ⌘ La mécanique hypothético-déductive



Approche linguistique

« Le mot mouvement a pour objet d'exprimer cette union intime entre la puissance et l'acte ». (P.Duhem)

« La notion d'addition n'a pas de prise dans la catégorie de la qualité ».

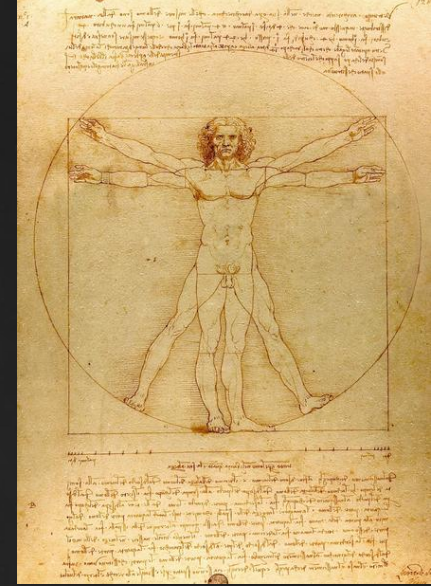
« More geometrico »
(théorie de sciences démonstratives d'Aristote)

Aristote (384-322 Avyt J-C)

On ne retiendra pas la Physique d'Aristote, car elle contient trop d'erreurs, cela ne veut pas dire que l'époque Antique n'était pas sur le bon chemin...

Au contraire, il semble que ce ne soit pas les mots qui soient venus aux choses dans un premier temps, mais davantage les choses aux mots. Archimède fut le médiateur de la naissance de la physique, en découvrit des pans entiers des mathématiques, inventa des mots comme centre de gravité...

Quand Vitruve écrivit qu'il s'écria Heuréka, est-ce là la description d'une inspiration divine ou d'un trait d'union entre heuristique et savoir.



Léonard de Vinci
« L'homme de Vitruve. »

La mécanique d'Archimède



Archimède
287-212 Av. J.-C.)

Un traité axiomatique : « L'équilibre des plans ou les centres de gravités des plans »

une formalisation quasi-Euclidienne (Déjà !).

Axiomes (Exemples)

- 1- « Des masses égales suspendues à égales distances d'un pivot sont en équilibre ».
- 4- « Similairement, si quelque chose est retiré d'une des masses, elles ne sauraient rester en équilibre plus longtemps, mais seulement être inclinées vers la masse qui n'a pas été modifiée ».

Propositions : Quand des corps suspendus à égales distances sont en équilibre, les masses des corps sont égales entre elles. Preuve reposant sur la *reductio ad absurdum* basée sur le postulat 4.

Archimède est considéré comme le père de la [mécanique statique](#). Dans son traité, *De l'équilibre des figures planes*, il s'intéresse au principe du levier et à la recherche de [centre de gravité](#).

On lui attribue aussi le [principe d'Archimède](#) sur les corps plongés dans un liquide (*Des corps flottants*).

Il travailla également sur l'optique (*La catoptrique*).

Il met en pratique ses connaissances théoriques dans un grand nombre d'inventions. On lui doit, par exemple,

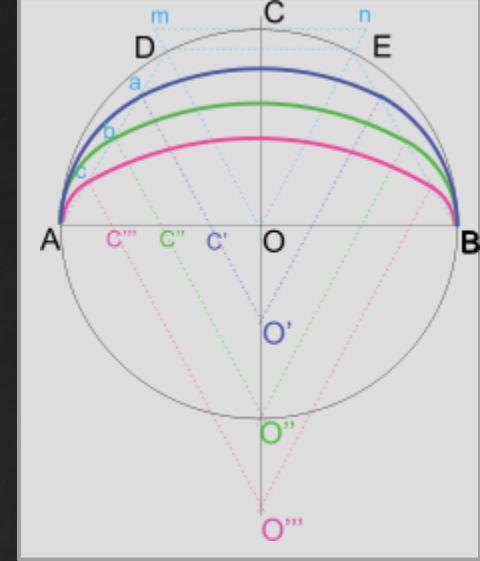
- des machines de traction où il démontre qu'à l'aide de [poulies](#), de [palans](#) et de [leviers](#), l'homme peut soulever bien plus que son poids ;
- des machines de guerre (principe de la [meurtrière](#), [catapultes](#), bras mécaniques utilisés dans le [combat naval](#)).

Parmi les machines de guerres très importantes l'on doit souligner l'appareil à mesurer les distances ([odomètre](#)) que les Romains empruntèrent¹¹ à Archimède. En effet pour que l'armée soit efficace, elle doit être reposée et les journées de marche doivent donc être identiques. La machine d'Archimède doit être réalisée avec des dents d'[engrenage](#) pointues et non carrées. On a mis très longtemps à la reconstituer car on faisait cette erreur ;

- la [vis sans fin](#) et la [vis d'Archimède](#), dont il rapporte, semble-t-il, le principe d'[Égypte](#) et dont il se sert pour remonter de l'eau. On lui attribue aussi l'invention de la [vis de fixation](#) et de l'[écrou](#) ;
- le principe de la [roue dentée](#) grâce auquel il construisit un planétaire représentant l'Univers connu à l'époque ;
- certains archéologues lui attribuent également la « [machine d'Anticythère](#) » dont des fragments sont conservés au [Musée national archéologique d'Athènes](#), machine qui permettait notamment de facilement prévoir les dates et heures des éclipses solaires et lunaires.

Définition de la concavité, convexité, plus court chemin entre deux points, calcul des volumes, quadratures,

Héron d'Alexandrie (II avt. J.-C.)



Héron **anticipe le principe de moindre action** quand il écrit que la nature agit par « moindre dépense ».

Il fut connu pour son traité des voutes qui fut travaillé par Archimède (« De la sphère et du Cylindre »).

Pappus (IV avt. J.-C.)

Il étudia le problème de l'équilibre d'un corps sur un plan incliné.

Formula l'**approche analytique** qu'on peut opposer à l'approche synthétique d'Euclide.

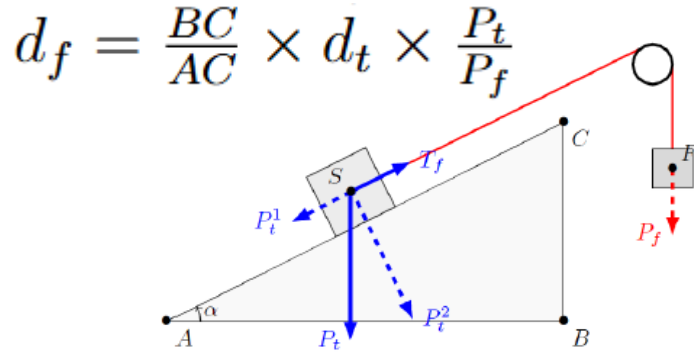
Distinction des deux mécaniques :

« Les mécaniciens de l'école d'Héron disent que la mécanique peut être divisée selon une partie théorique et une partie manuelle . La partie théorique est composée de la géométrie, de l'arithmétique, de l'astronomie et de la physique ; la partie manuelle du travail effectué sur les métaux, de l'architecture, de la menuiserie, de la la peinture et de tout ce qui implique une habilité manuelle».

Collection Mathématiques livre VII

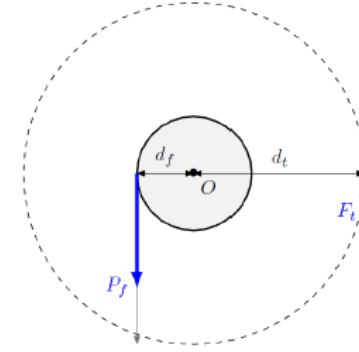
Les huit « mécaniques » des machines simples

- (a) levier,
- (b) roue,
- (c) poulie,
- (d) coin,
- (e) plan incliné,
- (f) vis,
- (g) engrenage,
- (h) treuil.



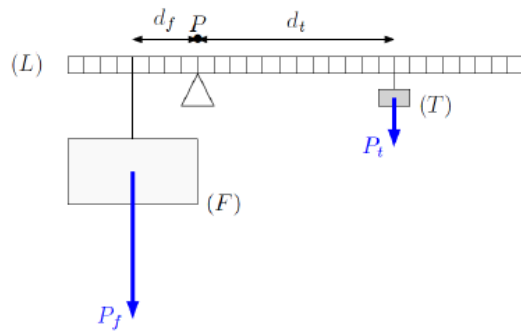
$$d_f = \frac{BC}{AC} \times d_t \times \frac{P_t}{P_f}$$

FIGURE 2.6 – Lever d'un fardeau à partir d'une poulie et d'une tare sur un plan incliné.



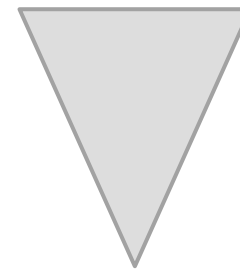
$$\frac{F_t}{P_f} = \frac{d_f}{d_t}$$

FIGURE 2.4 – Modélisation des efforts pour un mécanisme à poulie simple ou treuil.



$$\frac{P_t}{d_f} = \frac{P_f}{d_t}$$

FIGURE 2.5 – Mécanisme de levier entre un fardeau et une tare autour d'un pivot P.



Coin

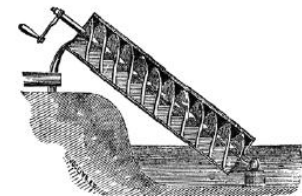
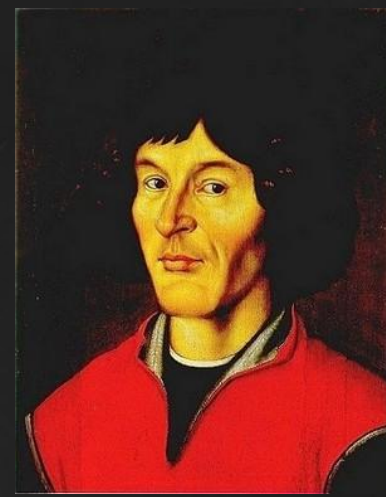


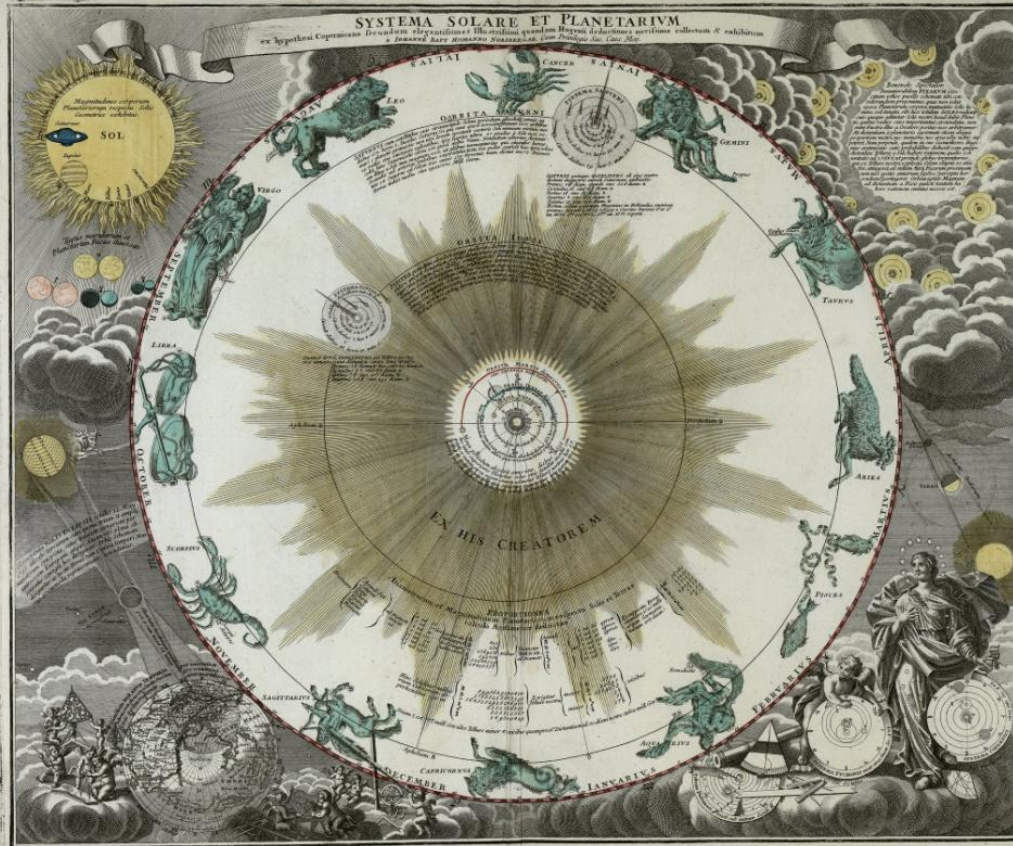
FIGURE 2.7 – Vis d'Archimède « Chamber's Encyclopaedia » (1875).

La mécanique des astres



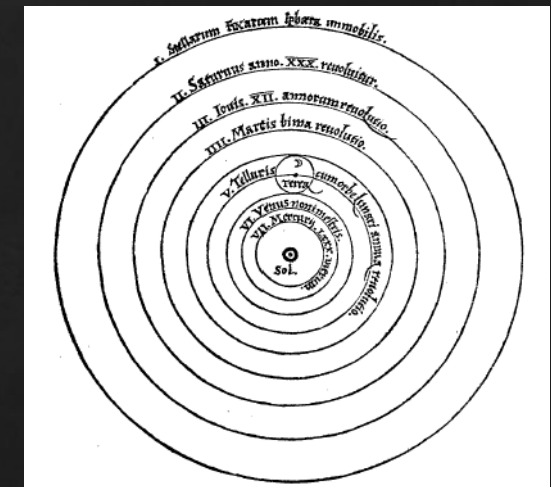
Nicolas Copernic
(1473-1543)

« *De Revolutionibus* » (1543)



« *Systeme solaire et planétaire* » (1543)

Doppelmayr (1677-1750)

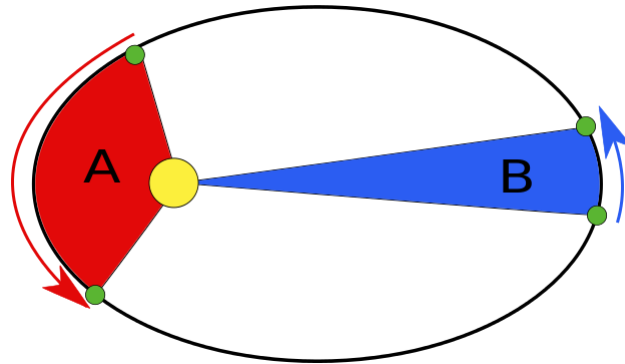


Le système héliocentrique

Le mouvement des planètes



Johannes Kepler
(1571-1630)



Première partie de la première loi (1609) [\[modifier | modifier le code \]](#)

Dans un référentiel immobile par rapport au Soleil, la trajectoire d'une planète se trouve dans un plan.

- Démonstration :

Cela résulte du fait que le Soleil attire la planète selon une **force centrale**. C'est-à-dire une force qui est toujours dirigée de la planète vers le Soleil.

En effet, étant données une position \vec{r}_0 et une vitesse \vec{v}_0 initiales, cela définit un plan. Selon nos conventions ci-dessus, c'est le plan passant par l'origine O, contenant les axes x et y.

Puisque la force est centrale, elle et l'accélération sont dans une direction se trouvant dans ce même plan. Donc les variations de vitesses et les variations de positions resteront dans ce même plan. En conclusion toute la trajectoire restera dans ce plan.

La deuxième loi de Kepler donnera une deuxième démonstration de cette partie.

Deuxième loi, loi des aires (1609) [\[modifier | modifier le code \]](#)

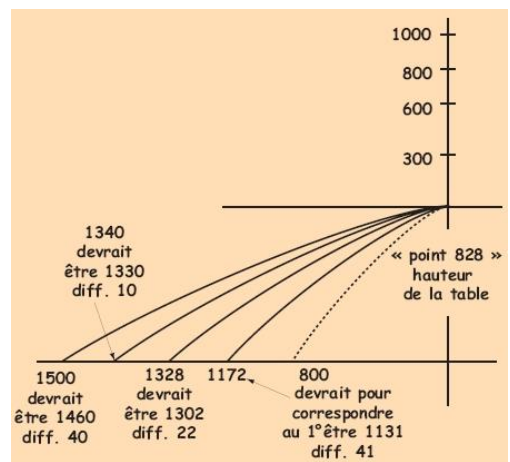
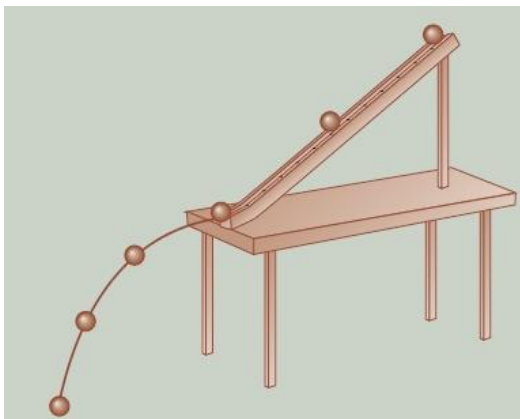
Soit $A(t)$ l'aire de la surface balayée par le rayon vecteur \vec{r} durant le mouvement, alors cette seconde loi stipule que des aires égales sont balayées dans des temps égaux.

Troisième loi (1618) [\[modifier | modifier le code \]](#)

Le carré de la période T varie comme le cube du **demi-grand axe** a :
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2}$$

1609 « *Astronomia nova* »
1618 « *Harmonices Mundi* » »

Les lois de la chute des corps



Galilée

Crédit : http://eurinsa.insa-lyon.fr/LesCours/physique/AppPhysique/apphysics/1historique/Galileo/Physique_composition_verification.html

Chute libre sans vitesse initiale [\[modifier\]](#) [\[modifier le code\]](#)

En supposant que le corps n'est soumis qu'à la pesanteur, si un corps ponctuel P est lâché d'un point de cote z_0 sans vitesse initiale et si l'axe des z est orienté vers le haut, alors on a :

$$a_z = -g \text{ (composante selon l'axe des } z \text{ de l'accélération, deuxième loi de Newton)}$$

$$v_z = -gt + V_0 = -gt \text{ car } V_0 = 0 \text{ (composante de la vitesse selon l'axe des } z)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \text{ (composante de la position selon l'axe des } z)$$

Avec :

- z =la hauteur du corps par rapport au sol
- g =l'accélération du champ de pesanteur terrestre (environ $9,81 \text{ m.s}^{-2}$)
- t =le temps en secondes

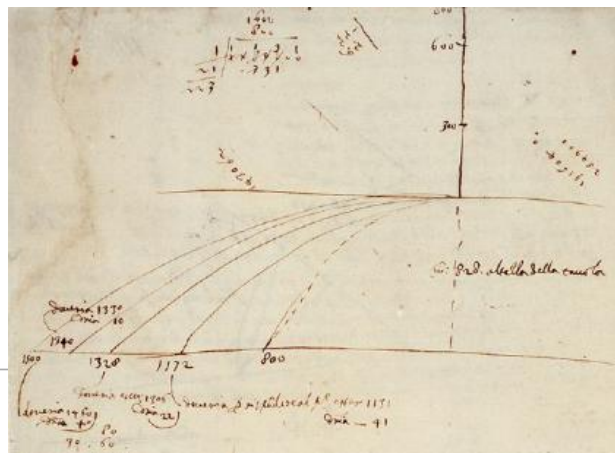
La vitesse V à l'impact est donnée par:

$$V = \sqrt{2gz_0}$$

Chute avec vitesse initiale [\[modifier\]](#) [\[modifier le code\]](#)

Trajectoire demi-parabolique

La chute libre avec vitesse initiale



Crédit : <http://images.math.cnrs.fr/Galilee-mon-contemporain.html>

Vérification de la théorie de Galilée

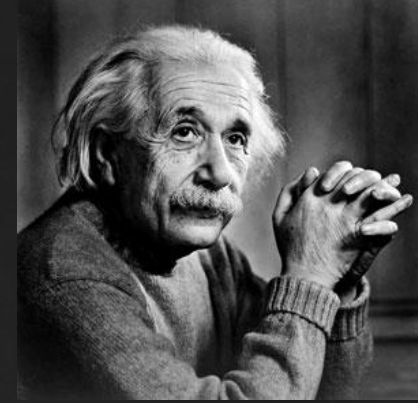
La théorie de la chute libre des corps est in-testable à la surface de la terre, compte-tenu qu'il ne s'y exerce pas le vide, et que la poussée d'Archimède fait effet sur les corps.

En 1671 David Scott astronaute lâche deux objets : une plume et un marteau alors qu'il se trouve sur sol lunaire, le vide est alors réalisé : les deux objets arrivent en même temps sur le sol.

[Vidéo de l'expérience](#)



Le point de vue d'Einstein



Einstein

« Les lois de Kepler apportent une réponse complète à la question de savoir comment les planètes tournent autour du soleil (trajectoires elliptiques, égalité des surfaces balayées en temps égaux, relation entre la dimension du grand axe et la période de révolution). Mais ces lois ne satisfont pas à l'exigence de causalité. **Ce sont trois lois indépendantes les unes des autres du point de vue logique, ne révélant aucune cohérence interne** ».

Einstein verra dans l'œuvre de Newton l'émergence d'une causalité avec un outil mathématique nouveau : les différentielles.

Galilée, Newton lus par Einstein – Espace et Relativité (F.Balibar)

La révolution Newtonienne

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feu Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté
de la Comédie Française, au Parnasse.

M. D. C C L I X.

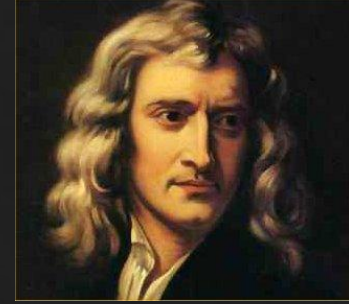
AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

- ⌘ Texte écrit en Latin par Newton, publié par la Royal Society (alors dirigée par Pepys) en 1687,
- ⌘ Traduction en Anglais par Motte en 1729,
- ⌘ Traduction en Français par la marquise de Châtelet entre 1745 et 1749.

Les Principia

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

(Des axiomes qui sont des lois)

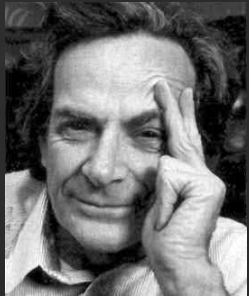


Newton (1642-1727)

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resisten-
tia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum.
Trochus, cujus partes cohaerendo perpetuo retrahunt sese
a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere re-
tardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora mo-
tus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistensibus
factos conservant diutius.



R.Feynmann

R.Feynmann : «Lorsque nous avons discuté les lois de Newton, nous avons expliqué que ces lois constituaient une sorte de programme dont le mot d'ordre serait " Cherchez les forces " et que Newton ne nous avait indiqué que deux choses concernant la nature des forces...Voilà à quoi se bornait tout le savoir de Newton concernant la nature des forces : **la loi de la gravitation et le principe de l'égalité de l'action et de la réaction; des détails, il ne savait rien.** »

La relation fondamentale de la dynamique

Loi 2 (Deuxième loi du mouvement de Newton [13]). « *La variation de la quantité [de mouvement] est toujours proportionnelle à la force motrice imprimée, et s'accomplit dans la direction de la droite qui supporte la force imprimée.* »

Traduction R.Dugas

$$m \times \gamma = F$$

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressa, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Traduction de la marquise du Châtelet :

2°. Que le changement qui arrive dans le mouvement est toujours proportionnel à la force motrice, & se fait dans la direction de cette force.

La loi de l'attraction universelle

Ce fut Gilbert qui suggéra le premier que la force de gravité fut proportionnelle aux masses. En 1645 l'astronome Bouillaud affirma que l'action attractive du soleil est centrale et sa dimension était en $1/r^2$, c'est une référence qu'on trouve dans les principia.

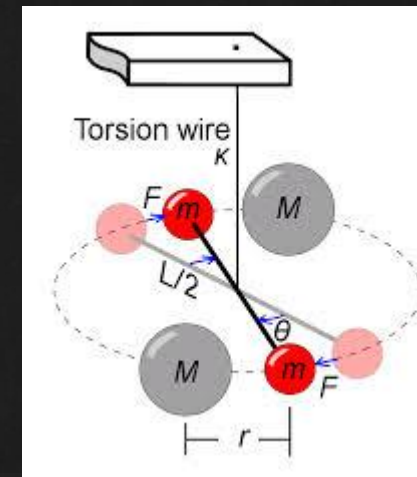
Les forces en $1/r^2$ étaient donc connues de certains scientifiques comme Hooke, bien qu'en 1660 il n'évoquait qu'une fonction de r , mais Newton grâce à cette loi retrouve les lois de Kepler.

$$|\mathbf{F}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La constante universelle G

C'est Cavendish qui calculera G de manière stricte en 1798.

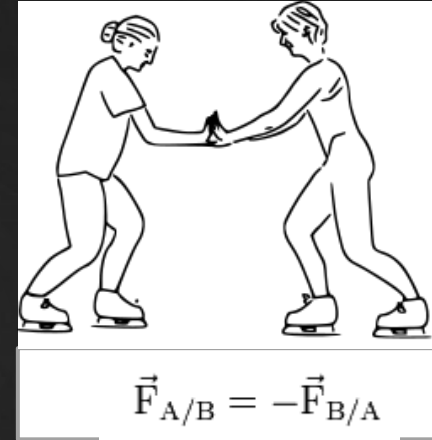
Dans une autre expérience célèbre il déduira la densité de la Terre.



Principe de l'action et de la réaction

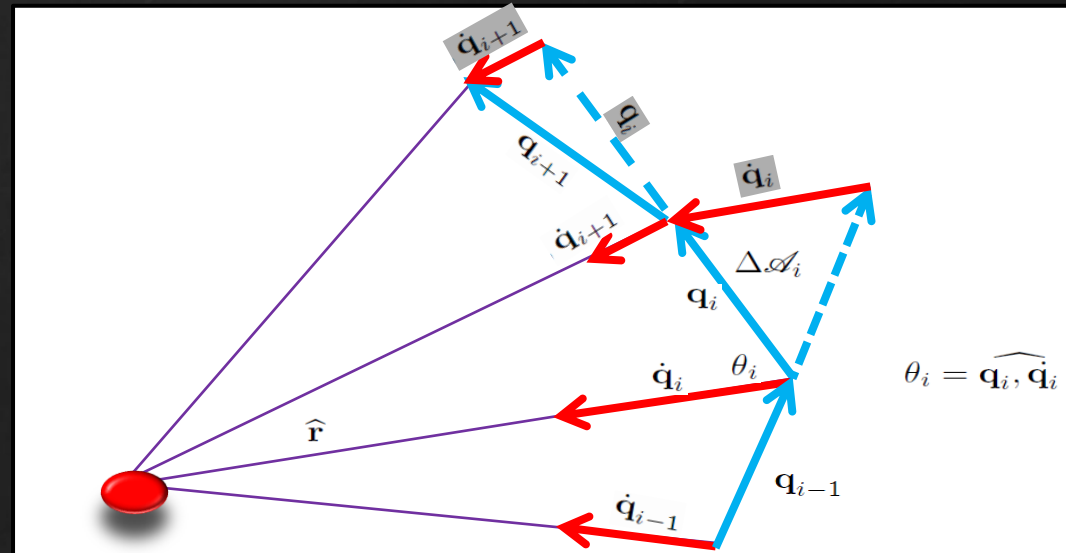
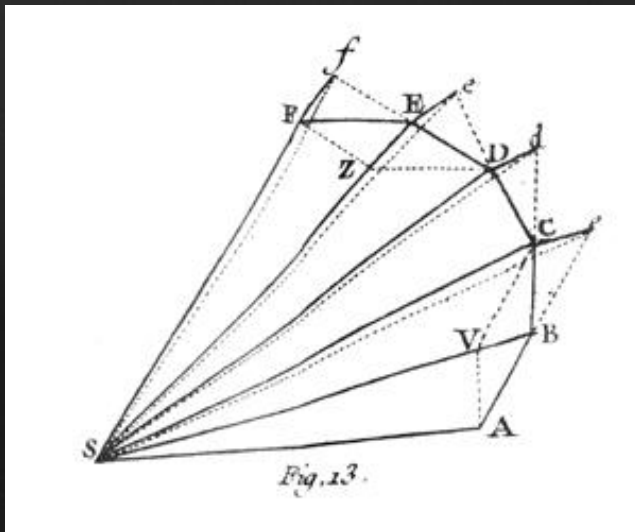
Troisième loi de Newton :

« L'action est toujours égale et opposée à la réaction; c'est à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires. »



Quantité de mouvement

« Par quantité de mouvement, j'entends le produit de la masse par la vitesse »



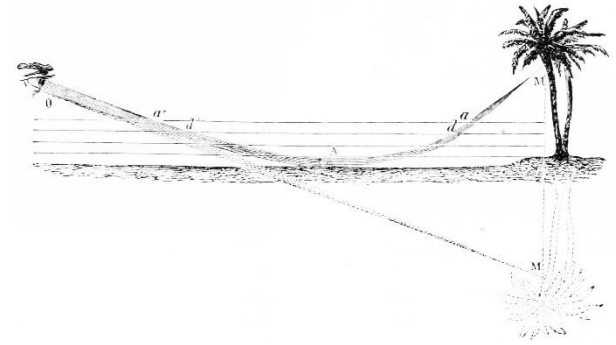
Principe de moindre action



Fermat

7. « Il appelle principe d'économie naturelle en ajoutant : la nature agit toujours par les voies les plus courtes » [7].

Ce principe part d'une erreur de Descartes remarquée par Fermat, il peut expliquer alors les effets de mirages (supérieur et inférieur).



Maupertuis

1740 : Maupertuis pose que le principe de moindre action :

À propos de la lumière : « ...*le chemin qu'elle tient est celui par lequel la quantité d'action est moindre* ».

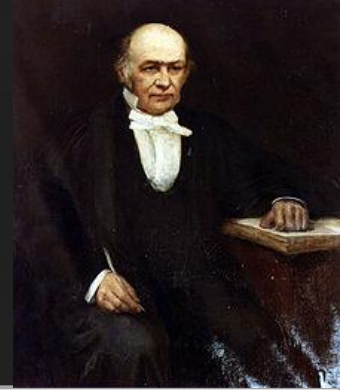
1744 : Maupertuis l'étend à la mécanique



Euler

Mais ce fut surtout Euler qui associera ce principe au traitement des fonctionnelles pour en faire émerger un principe variationnel en physique.

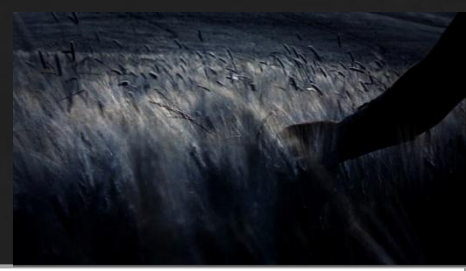
Le principe de moindre Action



“Tout système mécanique est caractérisé par une fonction de Lagrange, ou Lagrangien $L(x, \dot{x}, t)$ dépendant de la coordonnée x , de sa dérivée par rapport au temps $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, et éventuellement du temps. Pour toute trajectoire $x(t)$, on définit l'action S par l'intégrale $S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$. Le principe de moindre action dit que la trajectoire physique réellement suivie $X(t)$ est telle que S est minimale, ou plus généralement extrémale.”

William R. Hamilton « Principe de Moindre action (1834) ».

La mécanique classique



Définition 6 (Système Galiléen). *On appellera système Galiléen un système de référence où l'espace sera considéré comme homogène et isotrope, et le temps uniforme.*

Principe 1 (Principe de la relativité de Galilée [8]). *Les propriétés de l'espace et du temps sont les mêmes les uns par rapport aux autres dans tout système de référence Galiléen, animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement rectiligne et uniforme.*

Définition 10 (Corps libre). *On appelle corps libre un point matériel sur lequel il ne s'exerce aucune action. Il est équivalent de dire que sa quantité de mouvement est invariable.*

Loi 1 (Loi d'inertie (Newton)). *« Tout corps préserve dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans laquelle il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »*

Découverte de la dérivée Invention de la différentielle

Newton

2. EXAMPLE I. If the Relation of the flowing Quantities x and y be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; first dispose the Terms according to x , and then according to y , and multiply them in the following manner.

$$\begin{array}{l} \text{Mult. } x^3 - ax^2 + axy - y^3 \quad | \quad -y^3 + axy - ax^2 \\ \text{by } \frac{3x}{x} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot 0 \quad | \quad \frac{3y}{y} \cdot \frac{y}{y} \cdot 0 \\ \hline \text{makes } 3xx^2 - 2axx + axy \quad * \quad | \quad -3yy^2 + ayx \quad * \end{array}$$

The Sum of the Products is $3xx^2 - 2axx + axy - 3yy^2 + ayx = 0$, which Equation gives the Relation between the Fluxions x and y .

Fluxions, fluentes, aire des courbes, propriétés des tangentes, courbures...

Découverte entre 1666 et 1672

Publication en 1736

Application : La loi de la chute des corps de Galilée.

Appelons $d(t)$ la distance parcourue au temps t . Par définition, la vitesse v est la dérivée de d : $v(t) = d'(t)$. On s'intéresse à un objet dont la vitesse est proportionnelle au temps, c'est-à-dire $v(t) = k \cdot t$ avec une certaine constante k . Donc : $d'(t) = k \cdot t$. En intégrant par rapport au temps : $d(t) = \frac{1}{2} kt^2$.

Leibnitz

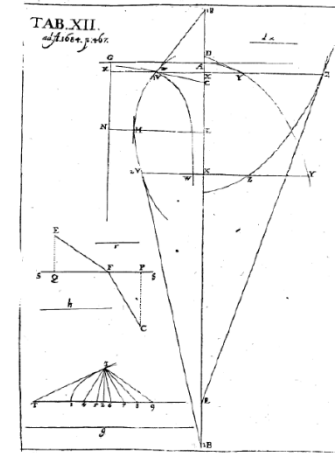


FIGURE 2 - Extrait de « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus... »

Intégrale, différentielle.

Découverte entre 1685 et 1687

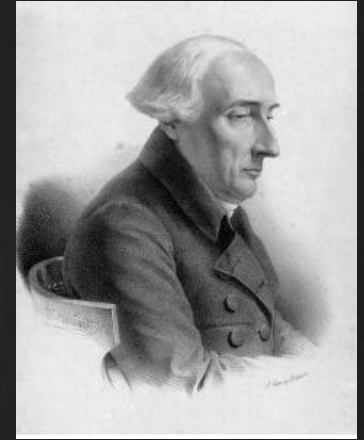
Publication en 1687

1788 – L'aube d'une révolution

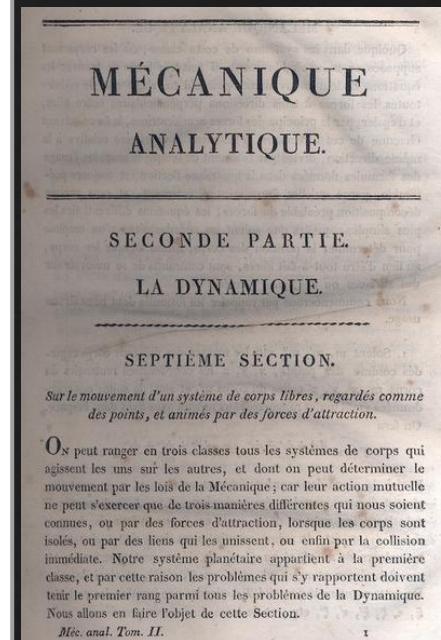
Publiée en 1788, cette œuvre marqua incontestablement une rupture épistémologique qui dépasse le cadre strictement de la mécanique. Dès le début du texte Lagrange est très clair envers le lecteur : « On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une machine régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'analyse, verront avec plaisir la mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu le domaine » [6]. On a vu comment les mécaniciens travaillaient avant Lagrange, après ils détermineront une fonction vérifiant un principe d'extremum pour une classe de fonction qu'on appellera fonctionnelle. On a alors une vue globale de l'évolution du système, on ne raisonne plus de manière séquentielle.

Il va dès lors exister une « branche » des mathématiques qui va s'occuper de la mécanique classique, c'est la mécanique analytique reposant sur l'analyse fonctionnelle.

Quelques problèmes phares : La stabilité du système solaire, les systèmes dynamiques dans leur généralités (sensibilités aux conditions initiales), ...



Lagrange





Eclatement de l'arkhéctonique

- ⌘ Archimède
- ⌘ Les Principia
- ⌘ La mécanique analytique
- ⌘ La mécanique de Maxwell

Evolution du cadre de la mécanique

On va entrer dans un cadre minimaliste avec la mécanique statistique.

- ⌘ Cela est davantage un éclatement d'un principe arkhéctonique que d'une mécanique.
- ⌘ Premier éclatement avec Planck : Sauts d'énergie – discontinuité – théorie de la mécanique quantique.
- ⌘ Second éclatement avec Einstein : L'espace et le temps absolus n'existent pas – théorie de la relativité.
- ⌘ Ce que Planck et Einstein démontrent de manière extrêmement violente, c'est :
 - ⌘ l'insuffisance des croyances subjectives et expérimentales en rapport à un certain paradigme, pour saisir le monde, qui se conjuguent à la suffisance de l'individu qui aime se nourrir de certitudes « absolues »

Préambule – la thermodynamique



Helmotz

Une limite intrinsèque à la mécanique : l'impossibilité du mouvement perpétuel

« De la puissance motrice des machines à feux » Sadi Carnot (1824)

Thermodynamique

Mécanique Statistique (1870)

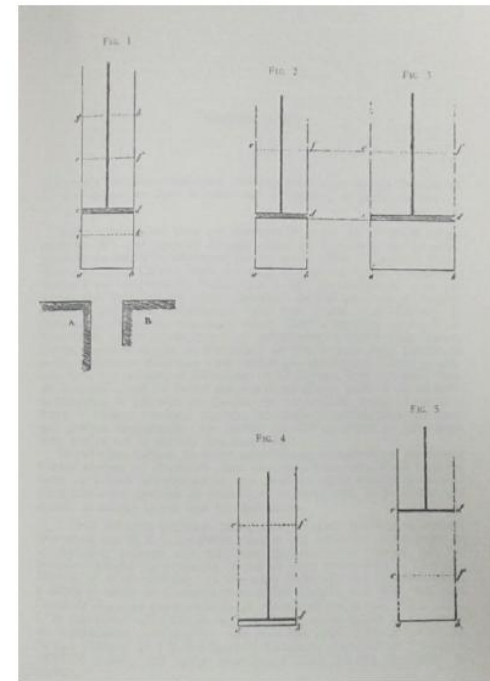
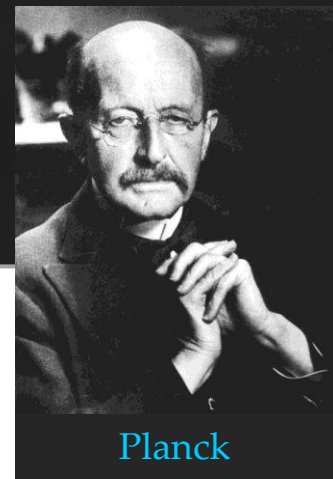


FIGURE 1.8 – Schémas originaux de Sadi Carnot.

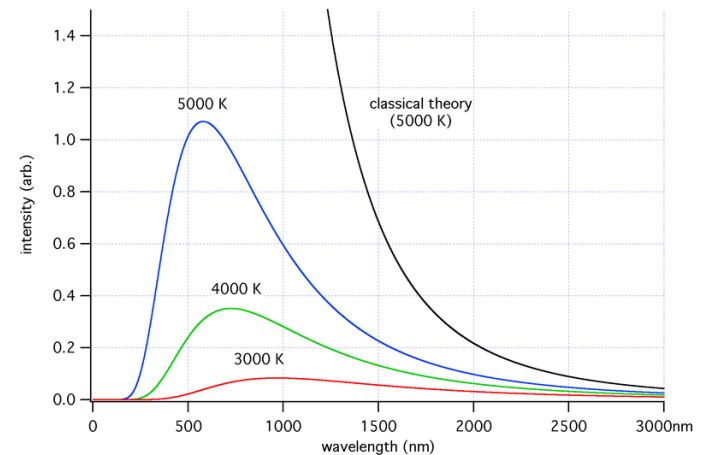
Théorème 1 (Carnot). *Partout où il existe une différence de température, il peut y avoir production de puissance motrice.*

Le rayonnement du corps noir



1900 - Acte de naissance de la mécanique quantique

- Dans la continuité de la mécanique statistique, Planck découvre le spectre de la radiation du corps noir.
- Découverte d'une nouvelle constante fondamentale
- Découverte d'un mécanisme inédit en mécanique, l'émission d'énergie se fait de manière discontinue.
- Planck dira « je le vois, mais je ne le crois pas ».



Au début des travaux sur le corps noir, les calculs de l'énergie totale émise donnaient un résultat surprenant : l'objet émettait une quantité infinie d'énergie ! Comme l'énergie calculée croissait lors de l'intégration du spectre pour les longueurs d'ondes courtes, on a appelé cela la « catastrophe ultraviolette ». La mécanique classique est là prise en défaut et Max Planck en a conclu que le modèle utilisé pour calculer l'énergie totale était erroné ; le modèle de Rayleigh et Jeans considérait en effet un spectre continu.

Dans un mémoire intitulé *Sur la théorie de la loi de la distribution d'énergie sur un spectre normal* et présenté le 14 décembre 1900, Planck expose ses déductions faites sur ce problème et propose alors l'hypothèse des quanta : l'énergie n'est pas émise de manière continue, mais par paquets dont la taille E dépend de la longueur d'onde :

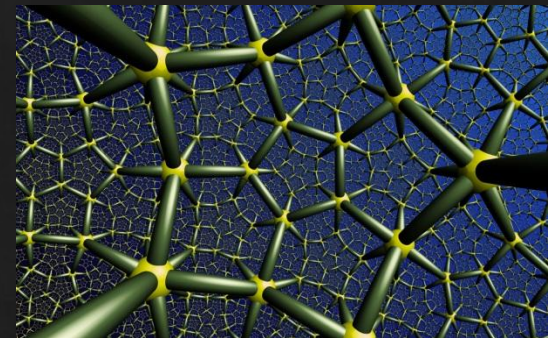
$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$L_{\lambda}^o = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \text{ avec } L_{\lambda}^o \text{ en } \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Revenons à la mécanique de Galilée, Newton, et Lagrange...

avec quelques **nouveaux outils mathématiques**, que nous allons définir :

- ⌘ Rappels sur les dérivations et différentielles,
- ⌘ Taux de croissance différentiel et fonctionnel,
- ⌘ Construction de l'exponentielle,
- ⌘ L'exemple de la courbe de la valeur (cas présenté à titre d'exemple pédagogique pour voir l'intérêt de l'instrument utilisé).
- ⌘ Un **intégrale de convexité** par les tangentes,
- ⌘ Les **fonctions métriques**.



Taux différentiels et fonctionnels

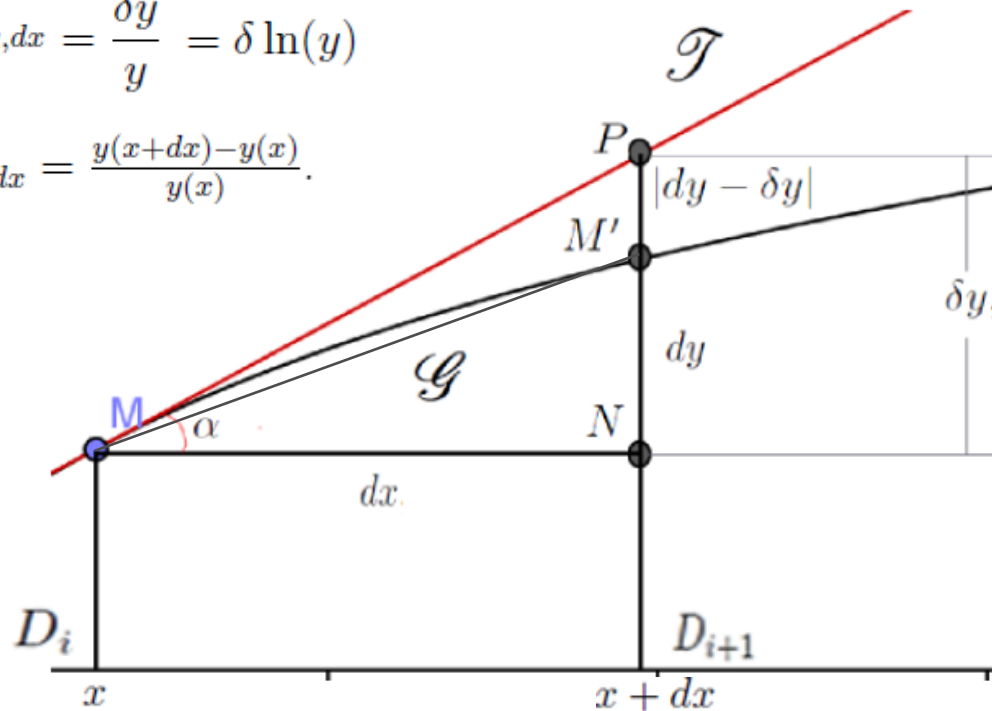
Définition 3 (Taux de croissance différentiel). *On appelle taux de croissance différentiel en x sur dx unités la valeur $\tau_{/y,dx} = \frac{/y(x+dx)-/y(x)}{/y(x)}$.*

Définition 4 (Taux de croissance fonctionnel). *On appelle taux de croissance fonctionnel en x sur dx unités la valeur $\tau_{y,dx} = \frac{y(x+dx)-y(x)}{y(x)}$.*

Différentielles

$$\tau_{y,dx} = \frac{\delta y}{y} = \delta \ln(y)$$

$$\tau_{y,dx} = \frac{y(x+dx) - y(x)}{y(x)}$$



$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{NP}{MN} \\ &= \frac{\delta y}{dx} \end{aligned}$$

FIGURE 3 – La différentielle $\Delta y = dy - \delta y$ entre x et $x + dx$.

Définition 1 (Différentielle). *La différentielle Δy de la fonction $y : x \mapsto y(x)$ est égale à l'accroissement de l'ordonnée de la tangente au point d'abscisse x , au graphe fonctionnel \mathcal{G} au point d'abscisse $x + dx$.*

Intégrale de convexité par les tangentes

Conditions nécessaires

1. le graphe fonctionnel y soit de convexité homogène,
2. la fonction y soit monotone,
3. le graphe fonctionnel admette une tangente en x_i , autrement dit y soit dérivable en x_i .

Indicateur de convexité σ sur chaque pas de la subdivision

$$\sigma_{i;i+1} = \frac{\tau_{/y,(x_{i+1}-x_i)}(x_i) - \tau_{y(x_{i+1}-x_i)}(x_i)}{|\tau_{/y,(x_{i+1}-x_i)}(x_i) - \tau_{y(x_{i+1}-x_i)}(x_i)|}$$

Indicateur de croissance ρ sur chaque pas de la subdivision

$$\rho_{i;i+1} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{|y(x_{i+1}) - y(x_i)|}$$

Calcul de l'intégrale

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^n \mathcal{A}_1 + \rho_{i;i+1} \times \mathcal{A}_2 + \sigma_{i;i+1} \times \mathcal{A}_3$$

	Convexité	Concavité
Croissance	$\sigma_{i;i+1} = 1, \rho_{i;i+1} = 1$	$\sigma_{i;i+1} = -1, \rho_{i;i+1} = 1$
Décroissance	$\sigma_{i;i+1} = 1, \rho_{i;i+1} = -1$	$\sigma_{i;i+1} = -1, \rho_{i;i+1} = -1$

$$S_{\mathcal{D}, \mathcal{J}}^* = \sum_{i=0}^n \mathcal{A}_1 + \rho_{i;i+1} \times \mathcal{A}_2$$

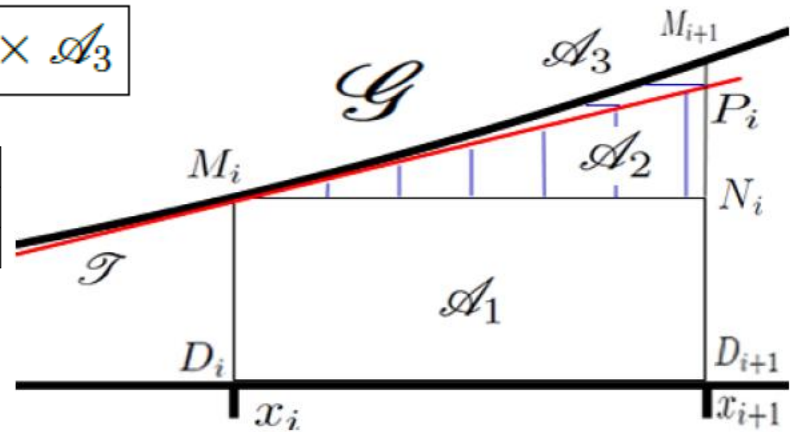


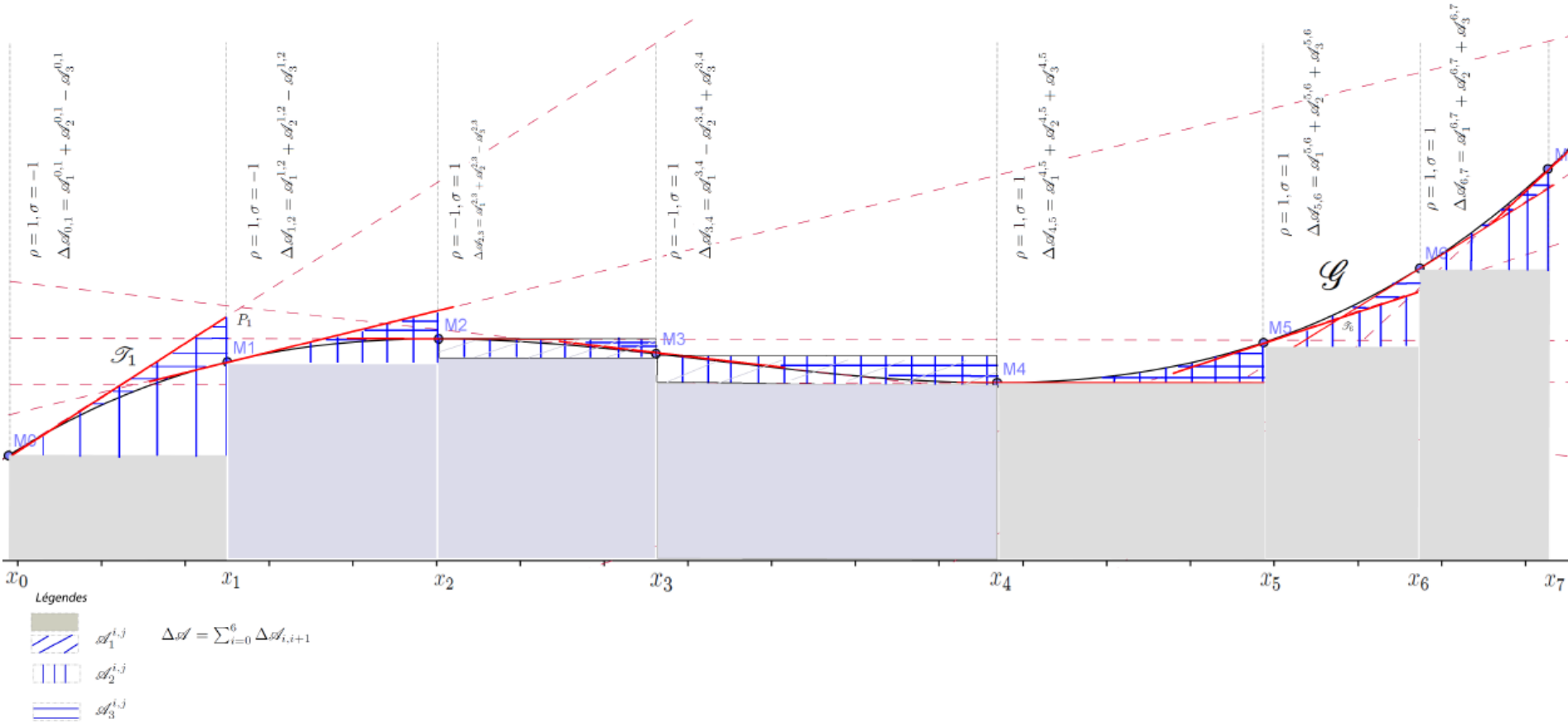
FIGURE 7 – Décomposition des aires pour le cas d'une fonction croissante et convexe sur le pas représenté.

On dira que y est alors intégrable si : $\forall \epsilon > 0$, il existe A tel :

1. qu'on puisse déterminer une jauge δ pour laquelle sur chaque pas de la subdivision y et y' soient monotones,
2. que pour \mathcal{D} une subdivision δ -fine qualitativement acceptable de $J \subset [x_0; x_n]$: $|S_{\mathcal{D}, \mathcal{J}}^* - A| \leq \epsilon$;

Exemple

Action et Dynamique du Point Matériel



$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^n \mathcal{A}_1 + \rho_{i;i+1} \times \mathcal{A}_2 + \sigma_{i;i+1} \times \mathcal{A}_3$$

$$S_{\mathcal{G}, \mathcal{T}}^* = \sum_{i=0}^n \mathcal{A}_1 + \rho_{i;i+1} \times \mathcal{A}_2$$

Projet d'une Science Expérimentale

à une **Théorie Hypothético-Déductive**

Lois expérimentales

Théorèmes

Principe d'inertie ou première loi de Newton	→	Théorème d'inertie
Deuxième loi de Newton	→	Théorème de la relation fondamentale de la dynamique
Principe de moindre action	→	Théorème de moindre action
Principe variationnel	→	Théorème de Lagrange
·		
·		
·		
Troisième loi de Newton	→	Théorème de l'action et la réaction
Loi de l'attraction universelle	→	Théorème de Newton

Théorème d'inertie

Théorème 1 (Théorème d'inertie). *Tout mouvement libre s'effectue avec une vitesse constante en grandeur et en direction.*

Comme on suppose que \mathcal{C} est un corps libre, on en déduit qu'il ne s'exercera aucune action sur le point matériel. Soit :

$$\begin{aligned} & /y(x + dx) = y(x + dx) \\ \Leftrightarrow & \frac{y(x + dx) - y(x)}{dx} = \frac{/y(x + dx) - /y(x)}{dx} \end{aligned}$$

Comme $/y$ est une droite de la forme $/y(x) = v \times x + w$ où $(v, w) \in \mathbb{R}^2$, alors on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{dx \rightarrow 0} \left[\frac{/y(x + dx) - /y(x)}{dx} \right] = v \\ \Leftrightarrow & \lim_{dx \rightarrow 0} \left[\frac{y(x + dx) - y(x)}{dx} \right] = v \\ & \Leftrightarrow \frac{\delta y}{dx} = v \end{aligned}$$

La relation fondamentale de la dynamique

Théorème 3 (Relation fondamentale de la dynamique). *La dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces s'exerçant sur ce corps.*

Approche vectorielle

$$\delta \mathbf{A} = \frac{d}{dx} (m \times \mathbf{v}(x + dx) - m \times \mathbf{v}(x))$$

$$\lim \left\{ \int_{x_i}^x \delta \mathbf{A} \right\}_{x \rightarrow x_i} = \lim \left\{ \int_{x_i}^x m \times d^2 \mathbf{v} \right\}_{x \rightarrow x_i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = m \times d\mathbf{v}$$

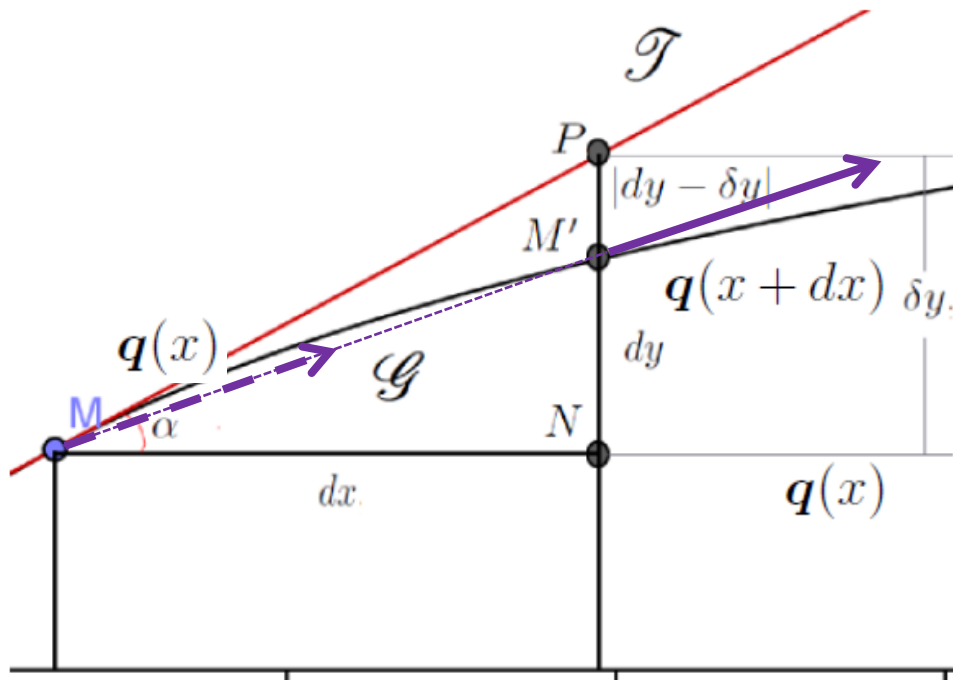
ou encore : $\mathbf{A} = m \times \boldsymbol{\gamma}$

Approche sur un intervalle

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta A = \int m \times d^2 v$$

$$\Rightarrow A = m \times dv$$

Théorème de moindre action



quantité d'action
quantité de mouvement

l'unicité du couple $F_\delta/\delta q$



Le pseudo-système



Passage à la limite des deux
fonctions qui coïncident



FIGURE 3 – La différentielle $\Delta y = dy - \delta y$ entre x et $x + dx$.

Théorème 4 (Théorème de moindre action). *La trajectoire d'un point matériel M sur un intervalle I caractérisée par une quantité de mouvement, s'effectuant sous la contrainte d'une résultante d'action en tout point de la trajectoire, sera telle que la quantité d'action sera minimisée sur la totalité de la trajectoire considérée.*

Conséquences épistémologiques directes

- ⌘ On passe d'une science expérimentale à une science hypothético-déductive.

Définition 7. *L'action résultante est le domaine d'une relation de correspondance initiée par un point matériel dont le co-domaine est sa dynamique déterminée par le triplet $(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, x)$ de l'espace fonctionnel.*

Définition 8 (quantité de mouvement). *On appellera $\mathbf{q} = m \times d\dot{\mathbf{y}}$ la quantité de mouvement, qui est une grandeur vectorielle.*

Définition 9 (Vitesse sur un élément différentiel). *On a appelé vitesse sur un élément différentiel dx , la grandeur $v = \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \frac{\tau_{/y,dx} \times \mathbf{y}}{dx}$*

L'action et la réaction

Définition 7. *L'action résultante est le domaine d'une relation de correspondance initiée par un point matériel dont le co-domaine est sa dynamique déterminée par le triplet $(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, x)$ de l'espace fonctionnel.*



La 3^o loi de Newton

→ Dans la théorie de Newton il est mis en avant un argument de symétrie qui permet d'expliquer que la terre exerce une action sur une pomme, comme elle peut exercer une action sur la lune.

On est dans un schéma causal, la cause est la gravité, l'effet est la force.

Cependant il peut y avoir des champs gravifiques qui n'exercent pas de force, prenons le cas d'un espace où il n'y aurait qu'un corps, il n'y aurait pas de masse.

Plus pragmatiquement, la force exercée par une étoile lointaine sur la terre peut être négligeable.

Nous disons alors que l'action et la dynamique sont mis en correspondance par le point matériel, que la cause de la force réside aussi bien dans le point matériel que dans le champ.

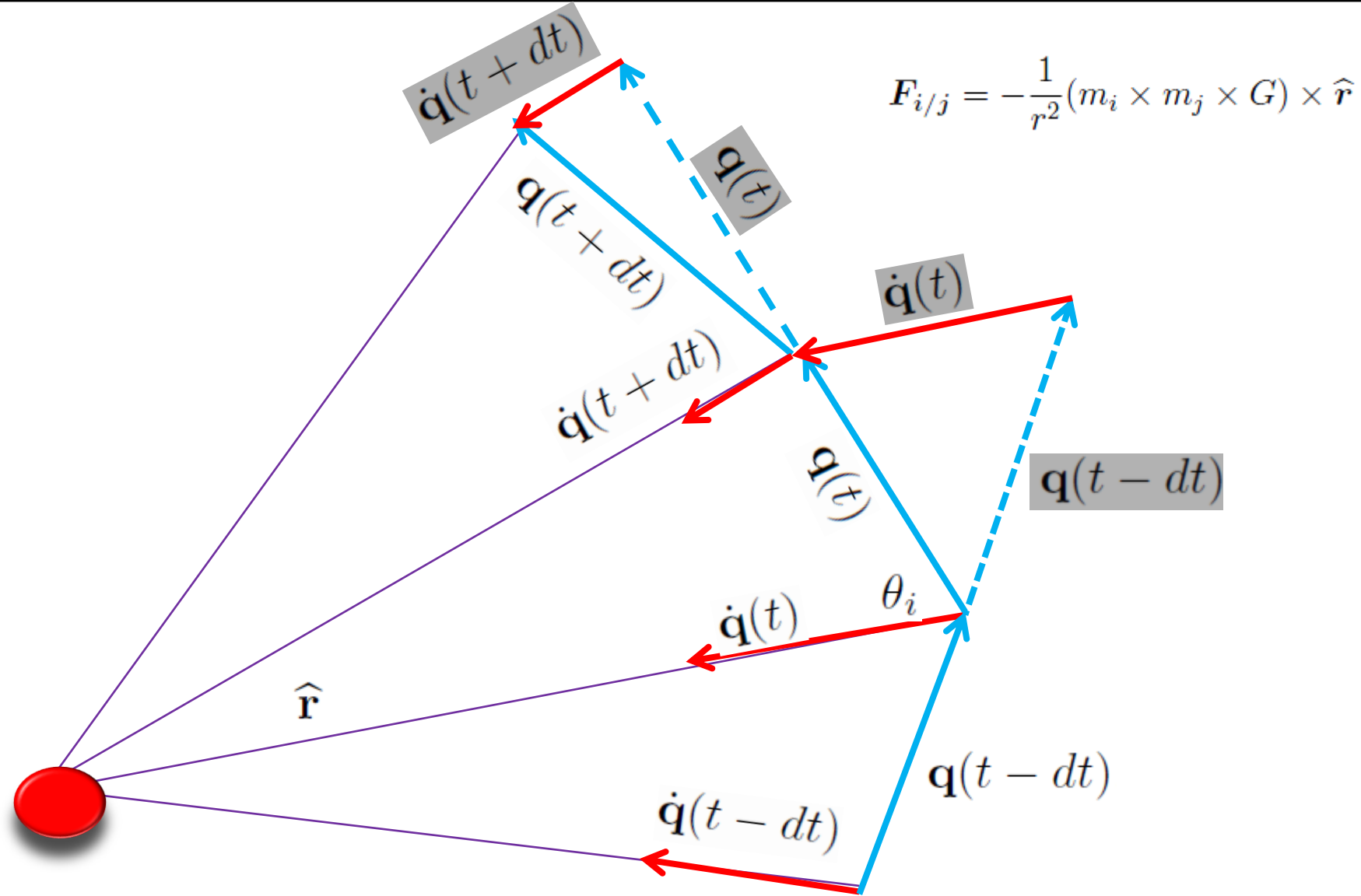
Cela est d'ailleurs implicite en prenant en compte la 3^o loi de Newton sur la force d'action et réaction.

Ce changement d'angle de considération est important car pour une dynamique il existe une action résultante et une seule, on a une bijection.

Ainsi la réciproque rend une application de la dynamis vers la résultante, et on peut imaginer une application symétrique qui rend compte de la dynamis dans un schéma à une force agissante dans la résultante on découvre alors une réapplication qui devient la troisième loi de Newton d'un point de vue logique (Action/réaction)

Théorème 4. *A toute force $\mathbf{A}(i/j)$ s'exerçant de P_i sur P_j , il existe une réaction de P_j sur P_i définie par $\mathbf{A}(i/j) = -\mathbf{A}(j/i)$.*

Quantités de/en mouvement



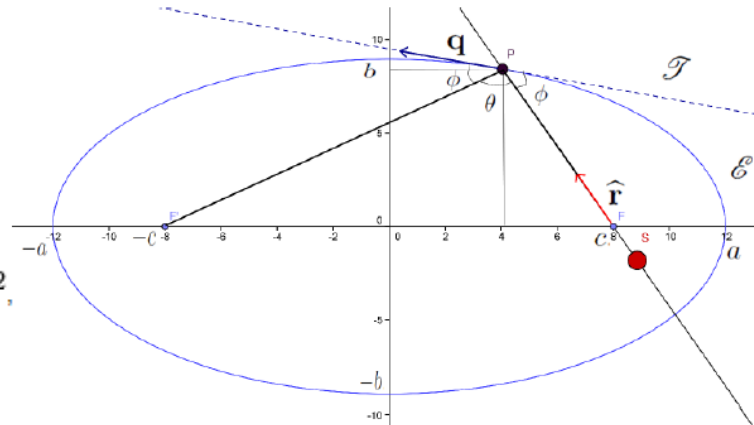
Gravitation universelle

G



$$\mathbf{F}_{i/j} = -\frac{1}{r^2}(m_i \times m_j \times G) \times \hat{\mathbf{r}}$$

$$G = 6,673\,84(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2},$$



Proposition 2 (Kepler-Halley-Newton). *Les forces d'attraction s'appliquant du soleil sur les planètes du système solaire sont des forces proportionnelles à l'inverse du carré de la distance entre le soleil et la dite planète.*

Théorème 1 (Expression d'une constante de gravitation). *Le relation de mise en correspondance entre deux corps massiques laisse apparaître l'expression d'une constante commune, quel que soit le couple de corps retenu.*

Définition 3 (Constante de gravitation universelle G). *On appelle constante de gravitation universelle la valeur la constante de gravitation qui s'exercent entre deux corps massiques quelconques.*

Deux approches de la chute libre

Dynamique

$$\mathbf{A}_r = -m_2 \times g \times \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{q}_i = -m_2 \left[g - \frac{m_1 \times G}{(R+r)^2} \right] \times \mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i = -\frac{m_1 \times m_2 \times G}{(R+r)^2} \times \mathbf{e}_1$$

Cinématique

$$\dot{\mathbf{q}}'_i = -m_2 \times g \times \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{q}'_i = -[m_2 \times g \times t + v_0] \times \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{A}'_r = -m_2 \times [g \times t + v_0 + g] \times \mathbf{e}_1$$

On a une représentation d'un même phénomène qui n'est pas une identité, qui n'est pas une transposition, mais l'expression d'un même permet par le fait que la masse est une jauge de capacité absolue pour les deux représentations.

Principe d'équivalence



Einstein : « Le principe de l'identité de la masse inerte et de la masse pesante pouvait être manifestement formulé de la façon très intuitive suivante : dans un champ de gravitation homogène, tous les mouvements se déroulent comme ils le font en l'absence de champ par rapport à un système uniformément accéléré ».

Un invariant d'Action et Dynamique

$$\forall g \in \mathbb{R} : \int_{t_0}^{t_n} g \, dt = \int_{t_0}^{t_n} d(gt) \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = -g \times \hat{\mathbf{r}}$$

$$\text{L'intégrale de Stieltjes} \quad \Leftrightarrow d\mathbf{q} = -g \times \hat{\mathbf{r}} \times dt$$
$$\Leftrightarrow d\mathbf{q} = -\hat{\mathbf{r}} \times d(gt)$$

On applique ensuite le théorème de la Relation Fondamentale de la Dynamique généralisée.

Einstein : « L'idée la plus heureuse de ma vie »

Méisme

Goethe écrit « Au commencement était l'action »

Principe variationnels & Dynamique / J-L Basdevant

Cependant nous avons vu que la structure d'un méisme définissait une quasi identité entre la quantité d'action et la quantité de mouvement, quasi car elles appartiennent à deux domaines différents.

Théorème 3 (Relation fondamentale de la dynamique)

$$\boxed{A_f = \dot{q}}$$

Méisme :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{E}_{\mathcal{A}} &\rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \bigwedge_{i=1}^n A_i &\mapsto (\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, x) \end{aligned}$$

Jauges

Définition 3 (Jauge). Soient deux ensembles $F \subset E$ munis d'une relation d'ordre générique \mathcal{O} et dont la relation binaire associée est \mathcal{R} . On appellera jauge sur F le couple relationnel $\mathcal{J}_F(\mathcal{O}, \mathcal{R})$ tel que :

$$\forall (x, y) \in F^2, (x\bar{\mathcal{O}}y \wedge y\bar{\mathcal{O}}x) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$$

Définition 4 (Jauge absolue). On dira que la jauge \mathcal{J} est absolue si $F = E$, et on notera la jauge $\mathcal{J}_E(\mathcal{O}, \mathcal{R})$ ou plus simplement $\mathcal{J}(\mathcal{O}, \mathcal{R})$ voire \mathcal{J} si les relations sont très clairement exposées.

Définition 5 (Jauge compatible ou de capacité). Soient les ensembles $F \subset E$ et $F' \subset E'$, tels que $E \cup E' = \emptyset$, s'il existe une jauge $\mathcal{J}_F(\mathcal{O}, \mathcal{R})$ telle qu'elle soit aussi une jauge pour F' , alors \mathcal{J}_F est une jauge de capacité pour F et F' .

Théorème 3 (Invariant de jauge). Soit un homéomorphisme α de E vers E' , pour lequel E est muni d'une jauge \mathcal{J}_E , alors c'est également une jauge de capacité pour E' .

Stabilité du système solaire

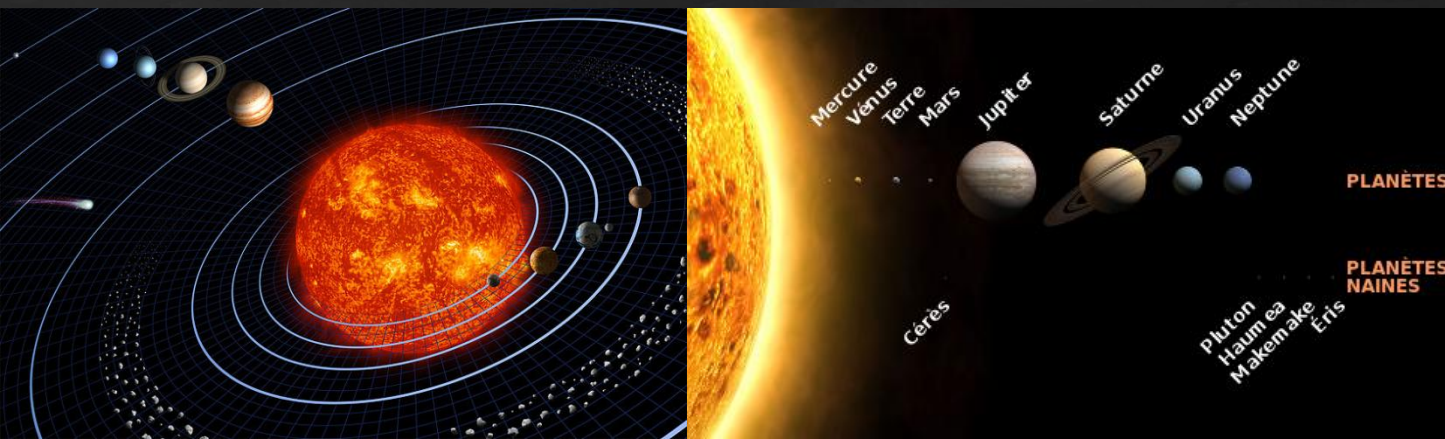
Stabilité du système solaire [modifier | modifier le code]

En 1989, Jacques Laskar démontre que les planètes du **système solaire** ont toutes des courses chaotiques, en particulier les planètes internes **Mercury** et **Vénus**, ainsi que la **Terre** et **Mars**. Mercury est celle dont l'**excentricité** de l'orbite est la plus chaotique et pourrait subir de fortes variations, entraînant un déséquilibre des orbites des planètes voisines et de possibles collisions, ou bien la rencontre de Mercury avec le **Soleil**, ou même son éjection du système solaire.

En 2009, il publie des résultats concernant l'évolution des orbites des planètes du système solaire sur une échelle de 5 milliards d'années (soit l'espérance de vie de notre étoile à compter du temps présent). Il s'agit de résultats statistiques obtenus par simulation numérique sur un modèle détaillé incluant le Soleil, toutes les planètes, **Pluton**, la **Lune** et prenant en compte des corrections **relativistes** de la loi de la gravitation¹. Sur 2 500 scénarios testés, environ 1 % peuvent être qualifiés d'instables car ils donnent lieu à une forte augmentation de l'excentricité de l'orbite de Mercury, ce qui conduirait à des scénarios catastrophes du type collision de planètes^{2,3}. Les scénarios restants, soit 99 %, sont stables dans le sens où les orbites planétaires ne se coupent jamais, ce qui empêche les collisions.

Les différents scénarios ne diffèrent que par les conditions initiales, c'est-à-dire par la donnée des positions et des vitesses des planètes du système solaire au temps présent. Les variations introduites sont infimes, de l'ordre du mètre pour la position d'une planète, et cependant les trajectoires divergent rapidement, sur des échelles de temps de l'ordre de 10 millions d'années. Ce caractère imprévisible de l'évolution du système solaire, quelle que soit la précision avec laquelle son état est connu à un instant donné, est propre aux **systèmes dynamiques chaotiques**.

De la loi de deux corps à un système chaotique à n corps, stable sur le million pour 99% des scénario.



Constantes fondamentales

Constante	Valeur	libellé
h	$6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$	Constante de Planck
G	$6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{Kg.s}^{-2}$	Gravitation universelle
c	$299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$	Vitesse de la lumière
g	9.81 m.s^{-2}	Accélération de la pesanteur sur la Terre

FIGURE 10.5 – Valeurs des constantes fondamentales